

110 學年度數學教學演示競賽活動 比賽（教案）設計格式範例

壹、設計理念

以數學史為主題引入課程，藉由丟番圖的生平故事，讓學生思索情境問題以及辨認問題中需求出的目標。連結一元一次方程式的列式以及小學六年級學過的純數字的等量公理之概念，以此帶入「未知數的等量公理、移項法則」的學習需求，讓學生理解移項法則與等量公理之間的關係；再讓學生比較這兩種方式解出一元一次方程式的異同；最終回到課程設定的情境，解出墓誌銘隱藏的謎題，得知丟番圖最終的年齡，以此檢驗學生在這堂課所學的概念以及培養學生運用數學解決情境中的問題。

貳、教學分析

一、教材分析：

這裡先比較在 108 課綱下，翰林、南一、康軒三版本對於一元一次方程式的課本內容進行分析，整理如表一：

表一：翰林、南一、康軒三版本「一元一次方程式」課程內容比較表

版本/課綱	翰林 108	南一 108	康軒 108
引入	運用漫畫引入，藉由朋友之間買洋芋片的價錢說明一元一次方程式的意涵	複習一元一次式，並以漫畫引入，以買筆與筆記本為例，要找出筆記本的價格，提供學生學習需求並將其表示為一元一次方程式。同時介紹基本名詞。	連結一元一次式學習經驗，並舉例說明一元一次方程式 例：「哥哥有 14 顆糖；且哥哥的糖果數為妹妹的 3 倍多 5 顆。」將其表示為一元一次方程式，並介紹基本名詞。
概念一 一元一次方程式的列式	僅以表格形式呈現，讓學生知悉將文字敘述轉成一元一次方程式，未提供後續	以表格形式讓學生練習將文字敘述轉成一元一次方程式，並設置例題讓學生練習	以表格形式讓學生練習將文字敘述轉成一元一次方程式

	練習		
概念二 方程式解的意義	以引入的例子連結，並實際帶入 $x=1、2、3$ 解釋解的意義，最後再提出「帶入的數使方程式等式兩邊的數值相等」則此數即為方程式的解	以引入的例子連結，並實際帶入 $x=11、12、13$ 解釋解的意義，最後提出「帶入的數使方程式等式兩邊的數值相等」則此數即為方程式的解；若不能使方程式等號兩邊數值相等則非方程式的解	以引入的例子連結，並實際帶入 $x=1、2、3$ 解釋解的意義，最後提出「帶入的數使方程式等式兩邊的數值相等」則此數即為方程式的解；若不能使方程式等號兩邊的數值相等則非方程式的解
概念三 等量公理	同	1. 以天秤做為方程式「等號」的意涵，分成加、減、乘、除四種情況，並說明在天秤兩邊做調整使得天秤仍維持平衡者即是方程式中「等號」成立的意義	
	異	1. 進行加、減法的等量公理是在天秤兩側加、減未知數項 2. 說明由正數推演等量公理會成立，而結論有提及在負數時等量公理也會成立	1. 將等量公理視為國小已學過的概念，並將其應用在一元一次方程式中 2. 加、減法的等量公理合併說明。以天秤兩側同時加減一常數天秤仍會平衡；乘、除法的等量公理合併說明。以天秤兩側同時乘、除一數天秤仍會平衡，並強調除數不為0時才成立 3. 未提及在負數時等量公理也會成立
概念四	1. 運用例題說明	1. 運用等量公理	1. 運用例題說明

<p>移項法則</p>	<p>等量公理與移項法則的關聯</p> <p>2. 規定讓學生使用移項法則解一元一次方程式，且題型有一般型、去括號等</p>	<p>例題說明，等量公理的步驟對應到移項法則的步驟</p> <p>2. 將四則運算的移項法則各自整理並將其抽象化表示</p>	<p>等量公理與移項法則的關聯</p> <p>2. 規定讓學生使用移項法則解一元一次方程式</p>
<p>例題安排</p>	<p>1. 解的檢驗：帶入數字要使方程式等號成立</p> <p>2. 等量公理與移項法則：在說明加、減的等量公理例題時會讓學生驗算；再藉例子說明移項法則之後，即進入乘、除的等量公理例題</p> <p>3. 運用等量公理以及移項法則同時解題</p> <p>4. 運用移項法則解一元一次方程式（一般型、去括號）</p> <p>5. 不限方式解一元一次方程式（題目係數為分數）</p>	<p>1. 以文字符號列出一元一次方程式</p> <p>2. 解的檢驗：帶入數字要使方程式等號成立</p> <p>3. 等量公理與移項法則：對應等量公理的說明，將其分成加減、乘除兩組說明，並在解題過程中提及對應移項法則的步驟</p> <p>4. 運用移項法則解一元一次方程式（一般型、去括號）</p> <p>5. 不限方式解一元一次方程式（題目係數為分數，強調先通分再解題）</p> <p>6. 探索解法的合理性</p>	<p>1. 以文字符號列出一元一次方程式</p> <p>2. 解的檢驗：帶入數字要使方程式等號成立</p> <p>3. 等量公理與移項法則：先以等量公理針對加、減、乘、除四種情況解題，並在各例題後方說明移項法則解題步驟</p> <p>4. 運用等量公理與移項法則同時解題並配合驗算解釋解的合理性</p> <p>5. 運用移項法則解一元一次方程式</p> <p>6. 不限方式解一元一次方程式（題目係數為分數）</p>

其他	無	讓學生思考 $ax=bx$ ，則 $a=b$ 是否成立	安排數謎遊戲讓 學生思考
----	---	-----------------------------------	-----------------

整體而言，三版的例題安排大致相同，但在說明等量公理時的方式差異最多，三版本皆是以天秤說明等量公理，並說明天秤兩邊做調整可維持天秤平衡可對照方程式等式成立的意涵；然而除了翰林版之外，另外二版皆提及國小有學過純數字的等量公理，將此套入一元一次方程式；而南一版直接將加減法、乘除法等量公理合併說明，讓學生知悉這樣分兩類說明是因為加減、乘除可看成類似的運算方式，但有可能造成學生產生迷失概念，此一部份可以再多思考如何說明。

移項法則的說明則會受等量公理的各版本說明方式不同而略顯不同，原則上都是安排在等量公理的例題中，並對照等量公理的步驟說明移項法則在加、減、乘、除四種情況的運算方式。

其他部分，翰林版著重在基本概念，但未有讓學生深思的問題，而南一與康軒版則有提出問題讓學生思考，教師可針對延伸問題進行解釋，讓學生可以解除疑惑或是提升學習動機。

二、學生分析

(一) 認知層面：

在國小六年級學生已經有學過等量公理，但僅限於在等號兩側做純數字的四則運算，但未涉及未知數等量公理及移項的概念；而在進入本課程之前，學生已經學過一元一次式的列式，並且知悉如何分類、合併未知數與常數項；理解一元一次方程式解的意涵；並且已經運用天秤的概念介紹未知數的等量公理。

(二) 情意層面：

學生在進入本課程之前已經能了解情境中一元一次方程式的意涵，並能將情境的文字轉換成代數式；而學生對於數學課進展過程中學習程度為一般，與數學老師互動佳，大致上都能理解課堂內容。

三、教學方法分析

(一) 直接講述法

這種方法是常見的方式，會先連結學生的學習經驗以及所學過的數學

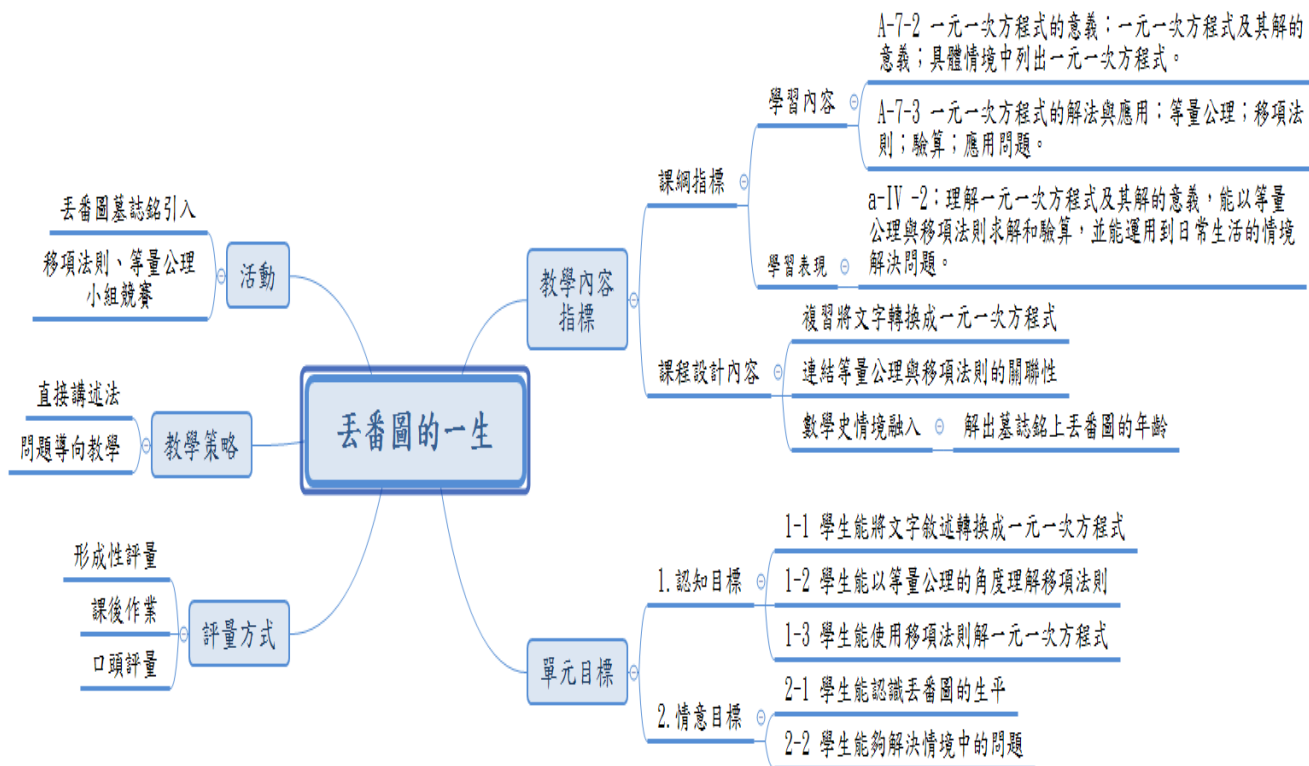
概念，讓學生思考、理解等量公理與移項法則各自的意義以及彼此之間的關聯性。這種方式的優勢在於老師可以掌握教學進度，並且將重要的概念傳達給學生，能顧及一般班級的學生的學習需求，學生也會在課堂上練習例題；然而可能使學生形成機械式理解，只知道同時在等號兩側作相同運算或是移項方便計算，卻不能理解這個程序性知識背後的意涵。

(二)問題導向學習(PBL 教學法)

以小組形式進行課程，並藉由問題、情境引入課程，漸漸引導學生進入課程中的核心概念，喚起學生的學習需求，並引導理解等量公理與移項法則的意義。待概念學習完畢之後讓學生探究問題，確認學生對於概念的理解程度，且藉由小組討論與探究問題提升學生的有效學習。最後指引學生回到課程預設的丟番圖墓誌銘的情境中解決問題，讓學生對於等量公理與移項法則在方程式中的運算與使用更加熟稔。

四、課程概念架構圖

指標/單元名稱/活動/策略/評量方式 (可依上列項目自行繪製概念架構圖)



參、教學活動設計

單元名稱	一元一次方程式	適用年級	國中一年級		
課程名稱	丟番圖的一生	教學時間	40 分鐘		
教材版本	自編教材為主，並輔以翰林、南一版課本內容				
教學準備	課程簡報、學習單、丟番圖簡介的影片與墓誌銘內容				
能力指標/學習表現	分年細目/學習內容		單元教學目標		
a-IV -2：理解一元一次方程式及其解的意義，能以等量公理與移項法則求解和驗算，並能運用到日常生活的情境解決問題。	<p>A-7-2 一元一次方程式的意義：一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。</p> <p>A-7-3 一元一次方程式的解法與應用：等量公理；移項法則；驗算；應用問題。</p>		<p>1. 認知目標</p> <p>1-1 學生能將文字敘述轉換成一元一次方程式</p> <p>1-2 學生能以等量公理的角度理解移項法則</p> <p>1-3 學生能使用移項法則解一元一次方程式</p> <p>2. 情意目標</p> <p>2-1 學生能認識丟番圖的生平</p> <p>2-2 學生能夠解決情境中的問題</p>		
單元教學目標	教學內容		時間	評量方式	備註
2-1 學生能認識丟番圖的生平	<p>一、引入課程：</p> <p>(一) 引導學生進入情境，並以簡報介紹丟番圖與他的墓誌銘</p> <p>1. 丟番圖簡介與引入</p> <p>2. 墓誌銘</p> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>這個墓裡長眠著丟番圖。啊！多麼偉大的人呀！ 他一生的 $\frac{1}{6}$ 為童年， 經過 $\frac{1}{12}$ 的歲月，臉頰已長滿了鬍鬚， 其後的 $\frac{1}{7}$，完成終身大事， 結婚 5 年之後，生了一個兒子。 啊！可憐的孩子，他在這世上的璀璨人生，只過了他父親的一半就撒手塵環。 而其父丟番圖也在充滿悲傷的四年後， 走完了他的一生。</p> </div>		5	口頭評量	<p>簡報說明，提升學需求感</p> <p>可先帶入數字讓學生思考，在引導學生有設立</p>

	<p>提問：是否能直接由碑文內容看出他的年紀呢？</p> <p>引導問題：一生的六分之一為童年，你知道他的童年有多少年呢？</p> <p>→先說明每一個階段都必須是「整數」，並先帶入 36 做嘗試</p>			<p>未知數的需求</p>
<p>1-1 學生能將文字敘述轉換成一元一次方程式</p> <p>2-2 學生能夠解決情境中的問題</p>	<p>二、課程內容：</p> <p>(一) 複習上堂課的概念</p> <p>1. 一元一次方程式列式</p> <p>(1) 將墓誌銘的內容轉換成一元一次方程式</p> <p>※讓學生自行完成學習單第一大題</p> <p>引導列式：如果丟番圖活了 x 歲</p> <p>一生的 $\frac{1}{6}$ 為童年 → $\frac{x}{6}$</p> <p>經過 $\frac{1}{12}$ 的歲月長滿鬍鬚 → $\frac{x}{12}$</p> <p>其後的 $\frac{1}{7}$ 完成終身大事 → $\frac{x}{7}$</p> <p>5 年後生小孩 → 5</p> <p>孩子只活父親的一半歲月就離世 → $\frac{x}{2}$</p> <p>4 年後撒手人寰 → 4</p> <p>列式：$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$</p>	<p>5</p>	<p>口頭評量、形成性評量</p>	<p>引入完成後才發學習單</p> <p>使用簡報影導學生理解情境並知悉如何設未知數與列式</p>
<p>1-2 學生能以等量公理的角度理解移項法則</p> <p>1-3 學生能使用移項法則解一元一次方程式</p>	<p>(二) 等量公理與移項法則的關聯性</p> <p>提問：接下來要如何解出 x 呢？</p> <p>1. 等量公理</p> <p>(1) 例題一：</p> <p>使用「等量公理」和「移項法則」解題</p> $7x - 18 = 4x + 6$	<p>10</p>	<p>口頭評量、形成性評量、課後作業</p>	<p>這部分先不求出方程式的解</p>

法一：等量公理

$$\begin{aligned}7x - 18 &= 4x + 6 \\7x - 18 + 18 &= 4x + 6 + 18 \\7x &= 4x + 6 + 18 \\7x &= 4x + 24 \\7x - 4x &= 4x + 24 - 4x \\7x - 4x &= 24 \\3x &= 24 \\ \frac{3}{3}x &= \frac{24}{3} \\x &= 8\end{aligned}$$

法二：移項法則

提問：在剛才的過程中是否有些步驟可以省略呢？

上堂課的等量公理有提及加減、乘除是類似的運算，所以過程可變成：

$$\begin{aligned}7x - 18 &= 4x + 6 \\7x &= 4x + 6 + 18 \\7x &= 4x + 24 \\7x - 4x &= 24 \\3x &= 24 \\x &= \frac{24}{3} \\x &= 8\end{aligned}$$

※建立移項法則原則：

等式一邊放 x ，一邊放常數項

(2) 例題二：

(i) 將全班學生分兩組，分別用兩種方式進行

$$2(-5x + 3) + 3 = -3(6x + 1) - 4x$$

1-3 學生能使用移項法則解一元一次方程式

5

口頭評量、形成

等量公理的性質對應移項法則

第一小題用等量公理和移項法則兩種方式解作答

<p>1-3 學生能使用移項法則解一元一次方程式</p> <p>2-2 學生能夠解決情境中的問題</p>	<p>(ii) 使用移項法則解題</p> $\frac{2x + 1}{3} - \frac{x - 4}{6} = 2$ <p>(3) 例題三：丟番圖墓誌銘</p> <p>提問：還記得開始上課前所提及的情境嗎？現在已經學會等量公理以及移項法則的概念，要如何求出丟番圖最終活了幾歲呢？</p> <p>列式：$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$</p> <p>合併同類項：$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + \frac{x}{2} + 9 = x$</p> <p>通分：$\frac{14x}{84} + \frac{7x}{84} + \frac{12x}{84} + \frac{42x}{84} + 9 = x$</p> <p>合併：$\frac{75x}{84} + 9 = x$</p> <p>移項法則：$9 = x - \frac{75x}{84}$</p> <p>整理後得到 $x = 84$</p> <p>回到情境，丟番圖一生活了84歲！</p> <p>三、今日課程總結</p> <p>1. 整理等量公理與移項法則的關聯性</p> <p>(1) 移項法則：</p> <p>建立移項法則原則：</p> <p>等式一邊放 x，一邊放常數項。以此解方程式</p> <p>(2) 引導學生觀察移向法則在過程中發現加變減，減變加，乘變除，除變乘。</p> <p>2. 預告下次主題與作業、概念心智圖</p>	<p>5</p> <p>5</p> <p>5</p>	<p>性評量、課後作業</p> <p>口頭評量、形成性評量、課後作業</p>
--	--	----------------------------	--

肆、教學評量

單元教學目標	評量方式	備註
1-1 學生能將文字敘述轉換成一元一次方程式	口頭評量、形成性評量	
1-2 學生能以等量公理的角度理解移項法則	口頭評量、形成性評量、 課後作業	
1-3 學生能使用移項法則解一元一次方程式	口頭評量、形成性評量、 課後作業	
2-1 學生能認識丟番圖的生平	口頭評量	此指標學生只需瞭解內文即可
2-2 學生能夠解決情境中的問題	口頭評量、形成性評量、 課後作業	

伍、附錄

一、課堂簡報

一元一次方程式

等量公理與移項法則

丟番圖的一生

上學是花他一生的六分之一做少年時代。

又花了一生的七分之一。他學上知識啟蒙了。

之後經過一生的十三分之一，他長了鬍子。

丟番圖的一生

想年輕，孩子他花了一個數字的時間。

哈哈！可是這很不巧！耗盡了五個數字的時間，他平安歸世。

後來前文的四年半，丟番圖就他相信，墓碑不穩人，他也就消失在未來的舞臺上了！

是否能直接由碑文內容看出他的年紀呢？

一生的六分之一為童年，你知道他的童年有多少年呢？

讓我們先任意找一個數字嘗試

例題一： $7x - 18 = 4x + 6$

法一：等量公理

$$\begin{aligned} 7x - 18 &= 4x + 6 \\ 7x - 18 + 18 &= 4x + 6 + 18 \\ 7x &= 4x + 6 + 18 \\ 7x &= 4x + 24 \\ 7x - 4x &= 4x + 24 - 4x \\ 7x - 4x &= 24 \\ 3x &= 24 \\ 3x + 3 &= 24 + 3 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

例題一： $7x - 18 = 4x + 6$

法二：移項法則

$$\begin{aligned} 7x - 18 &= 4x + 6 \\ 7x &= 4x + 6 + 18 \\ 7x &= 4x + 24 \\ 7x - 4x &= 24 \\ 3x &= 24 \\ x &= \frac{24}{3} \\ x &= 8 \end{aligned}$$

分組操作

例題二

$$(1) 2(-5x + 3) + 3 = -3(6x + 1) - 4x$$

請左半邊的學生利用 **等量公理** 計算例題
請右半邊的學生利用 **移項法則** 計算例題

移項法則

例題二

$$\frac{2x+1}{3} - \frac{x-4}{6} = 2$$

解一元一次方程式的過程中，我看見

1. 等式一邊放 x ，一邊放常數項

2. 運算符號移項後：
加變減，減變加；乘變除，除變乘

解開丟番圖的年紀之謎

還記得開始上課前所提及的情境嗎？現在已經學會等量公理以及移項法則的概念，要如何求出丟番圖最終活了幾歲呢？

列式 $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$

合併同類項 $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + \frac{x}{2} + 9 = x$

通分 $\frac{14x}{84} + \frac{7x}{84} + \frac{12x}{84} + \frac{42x}{84} + 9 = x$

合併 $\frac{75x}{84} + 9 = x$

移項法則 $9 = x - \frac{75x}{84}$

移項法則 $9 = x - \frac{75x}{84}$

$$x = 84$$

代回情境，丟番圖一生活了 84 歲！

二、課堂學習單

一元一次方程式--丟番圖的一生

班級： 座號： 姓名：

一、丟番圖與墓誌銘內容

今天大家當一日考古學家，來到希臘進行數學家的歷史探究活動，其中看見一座藏有一道數學謎題的碑文，讓我們來解開這項謎題吧！

(一) 墓誌銘內容

墳中安葬著丟番圖。
多麼令人驚訝，它忠實地記錄了所經歷的道路。
上帝給予的童年占六分之一，
又過十二分之一，兩頰長鬚，
再過七分之一，點燃起結婚的蠟燭。
五年之後天賜貴子，
可憐遲到的寧馨兒，享年僅及其父之半，便進入冰冷的墓。
悲傷只有用數論的研究去彌補，
又過四年，他也走完了人生的旅途

(二) 找出墓誌銘中的敘述，並轉換成一元一次式：

如果丟番圖活了 x 歲

文字敘述	一元一次式

你所得到的方程式是： _____

→有了方程式，接下來要如何解出 x 的值呢？

二、等量公理與移項法則

※回顧等量公理的性質（對應課本內容概念）

例題一：

(1) 用等量公理和移項法則兩種方式解題：

$$7x - 18 = 4x + 6$$

例題二：

(i) 「等量公理」、「移項法則」解 $2(-5x + 3) + 3 = -3(6x + 1) - 4x$

(ii) 用移項法則解題： $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-4}{6} = 2$

三、解出這個謎題，丟番圖最終活了幾歲呢？

四、課程歸納

(一) 移項法則的性質

五、課後習題：

(一) 完成概念心智圖

心智圖繪製區：

(二) 練習題

1. 求下列題目中一元一次方程式的根

(1) $6(3x - 8) + 1 = 4x - 5$

(2) $\frac{3x-3}{4} + \frac{x-7}{3} = -(x + 1)$

2. 若有一元一次方程式 $ax=bx$ ，試問 $a=b$ 是否成立？

3. 已知早餐店每籠小籠包的價格比 4 份燒餅的價格再貴 8 元；且 2 籠小籠包與 5 份燒餅的價格共為 185 元。

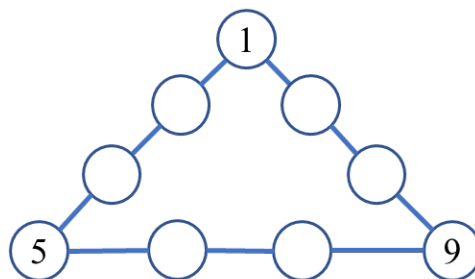
(1) 請問一份燒餅、一籠小籠包各是多少元呢？

(2) 承上題，若阿德帶了 100 元買早餐，請問阿德最多可以吃 1 籠小籠包與幾份燒餅呢？

(三) 挑戰題：1 - 9 解 20

1. 如右圖，現有一到九共九個數字要填入圓圈中，已經填入一些數字，請將剩餘數字填入並且滿足下列條件：

- (1) 三條直線上的和皆是 20。
- (2) 和 9 相鄰的兩數相差 3
- (3) 和 5 相鄰的兩數相差 4
- (4) 和 1 相鄰的兩數相差 5



2. 韋達是十六世紀的法國業餘的數學家，因他對於代數符號的使用對後世數學發展有所影響，下面的紀錄是關於他的生平，請求出韋達的年齡

法國曾有位數學家，在十六世紀是法國數學界的佼佼者。年少有為的他，人生前三分之一再少兩年就取得法律學位。又過了五年，與帕爾特奈守住了一座城池，再過九分之一，來到巴黎擔任檢察官。十二年後，因為捲入宗教紛爭而被流放，但他仍撰寫出《新代數》，開創代數符號，為後世代數發展創下一個里程碑。經歷七分之二的時光，以三角學解開荷蘭官員給出的難題，保住法國的國威，但人生也剩下最後的七分之一。離去時只留下符號代數與三角，但卻影響後續百年的數學發展，開創一個新的時代。

六、參考資料

1. 十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校-數學領域
2. 翰林出版事業股份有限公司（2020）。國中數學課本第一冊。台南市：翰林出版事業股份有限公司。
3. 康軒文教事業股份有限公司（2020）。國中數學課本第一冊。台北市：康軒文教事業股份有限公司。
4. 南一書局企業股份有限公司（2020）。國中數學課本第一冊。台南市：南一書局企業股份有限公司。
5. 洪萬生等著，《窺探天機：你所不知道的數學家》（2018），三民出版社，頁 111-123
6. 《數 U 遊戲》。 <https://thomasti.pixnet.net/blog/post/291768464>