【附件 4】

113 學年度數學教學演示競賽活動
教案設計格式範例

壹、設計理念

本課程建立在學生對於三角形內心性質已有初步瞭解，藉由《九章算術》第九章《勾股》篇一道關於求直角三角形的內切圓直徑的問題引入，讓學生欣賞題目並嘗試翻譯，再引導學生回想起畢氏定理與前一堂介紹的三角形內心性質，並由這個特殊例拓展至一般例，證明任意的三角形，可利用內切圓面積與三角形周長，求出三角形的面積，最後再連結之前學過的「圓外一點做出的兩條圓的切線等長的性質」，進一步探討直角三角形的內切圓半徑的第二種求法。最後統整本節介紹的三角形內心性質與延伸出的相關概念，期望藉此強化學生對於三角形內心的概念，並為高中學習相關概念奠基，讓學生能順利接軌。

貳、教學分析

一、教材分析

此處比較在 108 課綱下，翰林、南一、康軒三版本教科書對於三角形內心的內容進行分析，整理如表一：

表一：翰林、南一、康軒三版本「三角形的內心」課程內容比較表

版本	**翰林**	**康軒**	**南一**
引入	運用漫畫引入，藉由三角形公園要蓋一座噴水池，且要求噴水池與外圍三條道路等距，提出蓋在何處最為恰當作為引入	置入插圖，並藉由三角形公園要蓋一座遊樂場，且要求其與外圍三條道路等距，提出蓋在何處最為恰當作為引入	置入插圖，並藉由三角形公園要蓋一座涼亭，且要求涼亭與外圍三條道路等距，提出蓋在何處最為恰當作為引入
概念一 三角形三內角平分線的交點會交於一點	安排探索活動，以教科書附件**摺出直角、銳角、鈍角三角形的角平分線**，讓學生觀察軌跡，並以角平分線的性質說明三角形三個	藉由角平分線的性質，並配合附件說明三角形三個內角的角平分線交於一點，即稱為內心。同時整理出三種三角形的內心尺規作	安排探索活動，以**尺規作圖分別畫出直角、銳角、鈍角三角形的角平分線**，並以角平分線的性質說明三角形三個內角的角平分

	內角的角平分線交於一點，即稱為內心。最後歸納出內心性質	圖作法，說明三角形三個內角的角平分線交於一點，即稱為內心。最後歸納出內心性質	線交於一點，即稱為內心。最後歸納出內心性質
概念二 三角形的內心與三頂點連線所形成的三個三角形，面積比等於對應的三邊長比	直接說明利用「三角形內心到三邊等距」輔以圖片。說明三角形的內心與三頂點連線所形成的三個三角形，面積比等於對應的三邊長比，並輔以隨堂練習題，讓學生及時練習	安排例題直接說明三角形的內心與三頂點連線所形成的三個三角形，面積比等於對應的三邊長比	在概念三之後以引入的例子連結，利用「三角形內心到三邊等距」輔以圖片。說明三角形的內心與三頂點連線所形成的三個三角形，面積比等於對應的三邊長比
概念三 三角形面積與內切圓半徑、三角形周長的關係	在講解完概念二後，直接利用「三角形內心到三邊等距」以及「三角形內心為內切圓圓心」兩個性質證明 **三角形面積為** **三角形周長** $\times$ **內切圓半徑** $\div$ **2**	在講解完概念二後，直接利用「三角形內心到三邊等距」以及「三角形內心為內切圓圓心」兩個性質，以例題形式證明 **三角形面積為** **三角形周長** $\times$ **內切圓半徑** $\div$ **2**	直接利用「三角形內心到三邊等距」以及「三角形內心為內切圓圓心」兩個性質證明**三角形面積為** **三角形周長** $\times$ **內切圓半徑** $\div$ **2**
概念四 直角三角形的內切圓半徑	在概念三之後，以步驟化的方式證明直角內切圓半徑為： $\frac{(\text{兩股和}-\text{斜邊})}{2}$。	在概念三之後，以例題形式說明直角三角形的內切圓半徑為： $\frac{(\text{兩股和}-\text{斜邊})}{2}$。	在概念三之後，先說明任意三角形可利用三角形內切圓半徑與周長求面積，再證明直角內切圓半徑為： $\frac{(\text{兩股和}-\text{斜邊})}{2}$。
例題、習題安排	1. 探索內心位置並整理尺規作圖找不同類型三角形的內心的案例	1. 內心與角度：利用內心性質與國二學過的鏢型，求特定角度	1. 探索不同類型三角形的內心位置，並以問題引導思考

	2. 內心與角度：利用內心性質與國二學過的鏢型，求特定角度 3. 利用三角形面積求三角形內切圓半徑 4. 求直角三角形的內切圓半徑	2. 以例題證明三角形的內心與三頂點連線所形成的三個三角形，面積比等於對應的三邊長比，並安排練習題 3. 以例題證明三角形面積可由三角形內切圓半徑與周長求出，並安排練習題 4. 以例題證明直角三角形的內切圓半徑，並安排練習題	2. 證明前述概念三的內容後，安排例題與習題練習 3. 安排練習題讓學生找出直角三角形的內切圓半徑 4. 安排例題實際操作三角形的內心與三頂點連線所形成的三個三角形，面積比等於對應的三邊長比 5. 內心與角度：利用內心性質與國二學過的鏢型，求特定角度

整體而言，翰林版與康軒版的教科書內容安排與教學脈絡相似，皆先介紹三角形內心的性質，再依序探討「三角形的內心與三頂點連線所形成的三個三角形，面積比等於對應的三邊長比」與「如何利用內切圓半徑與周長求三角形面積」；而南一版則是介紹三角形內心的性質之後，先講解並證明「如何利用內切圓半徑與周長求三角形面積」，再探討「三角形的內心與三頂點連線所形成的三個三角形，面積比等於對應的三邊長比」。

本教案會側重在如何利用內切圓半徑與周長求三角形面積，並進一步探討直角三角形兩股長度、斜邊長與內切圓半徑的關係。

二、學生分析

在認知層面，設定學生已經對於三角形內心的三個性質：「三角形的內心為內切圓的圓心」、「三角形的內心為三內角之角平分線之交點」、「三角形的內心至三角形三邊等距」有初步瞭解。而在情意層面上，學生程度中等，會彼此討論，且在學習上能夠與老師互動，藉由問題引導與學生之間的討論，多數同學可掌握該主題的概念。

三、教學方法分析

(一)問題導向學習--PBL 教學法

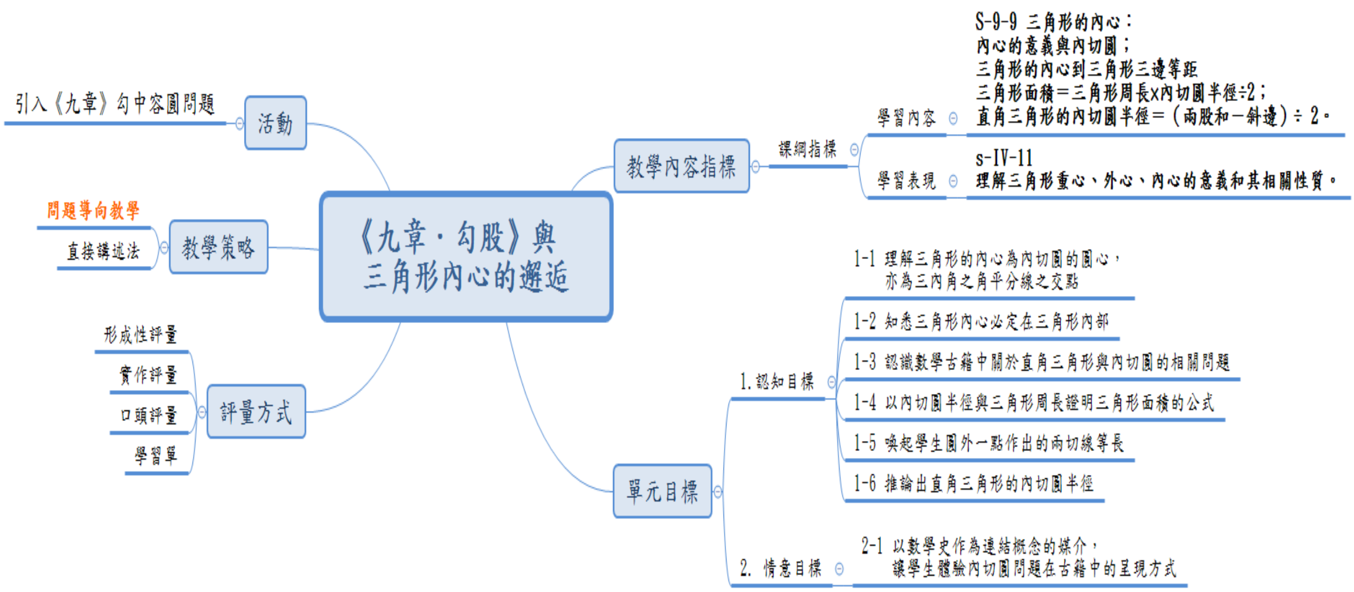
藉由問題、情境引入課程，引導學生進入課程中的核心概念，再課程中先提出問題，讓學生回想起畢氏定理、三角形內心的性質，並由數學史的問題引入，以特定釋例讓學生探討三角形面積的新的求法，即「**三角形內切圓半徑乘上三角形周長除以二為三角形面積**」，並嘗試寫出證明，以此熟稔三角形內心的性質。此方法也是這份教案主要使用的教學法。

(二)直接講述法

這是常見的教學方式，可先連結學生的學習經驗以及所學過的數學概念，讓學生回想前一堂介紹過的三角形內心性質。這種方式的優勢在於老師可以掌握教學進度，並且將重要的概念傳達給學生，能顧及一般班級的學生的學習需求，學生也會在課堂上練習例題；然而幾何單元內容對於學生而言多為新學的概念，且經常會需要證明性質，內容過於繁雜、抽象，對於某些理解較慢的學生學習負擔過大，可能導致學生將概念弄混而未察覺錯誤。

四、課程概念架構圖

指標/單元名稱/活動/策略/評量方式（可依上列項目自行繪製概念架構圖）



參、教學活動設計

單元名稱	三角形的外心、內心與重心	**適用年級**	國中三年級
課程名稱	《九章 • 勾股》與三角形內心的邂逅	**教學時間**	45 分鐘
教材版本	以翰林為主，並參考康軒、南一版內容		
教學準備	圓規、學習單、電子屏幕、《九章算術》書籍		

能力指標/學習表現	**分年細目/學習內容**	**單元教學目標**
108 數學領綱： s-IV-11 理解三角形重心、外心、內心的意義和其相關性質。	**108數學領綱：** **S-9-9 三角形的內心：** 內心的意義與內切圓； 三角形的內心到三角形三邊等距 三角形面積＝三角形周長×內切圓半徑÷2； 直角三角形的內切圓半徑＝ （兩股和－斜邊）÷ 2。	**一、認知層面** **1-1 理解三角形的內心為內切圓的圓心，亦為三內角之角平分線之交點** **1-2 知悉三角形內心必定在三角形內部** **1-3 認識數學古籍中關於直角三角形與內切圓的相關問題** **1-4 以內切圓半徑與三角形周長證明三角形面積的公式** **1-5 喚起學生圓外一點作出的兩切線等長** **1-6 推論出直角三角形的內切圓半徑** **二、情意層面** **2-1 以數學史作為連結概念的媒介，讓學生體驗內切圓問題在古籍中的呈現方式**

單元教學目標	**教學內容**	**時間**	**評量方式**	**備註**
1-1 理解三角形的內心為內切圓的圓心，亦為三內角之角平分線之交點 **1-2 知悉三角形內心必定在三角形內部**	**第一部分：課前回顧** 1. 複習前一堂提及的內心性質： (1) 三角形的內心為內切圓的圓心 (2) 三角形的內心為三內角之角平分線之交點 (3) 三角形的內心至三角形三邊等距	2		

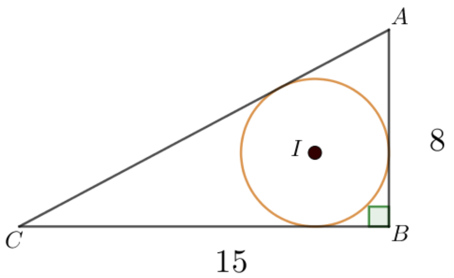
<table>
<tr>
<td>

1-3 認識數學古籍中關於直角三角形與內切圓的相關問題

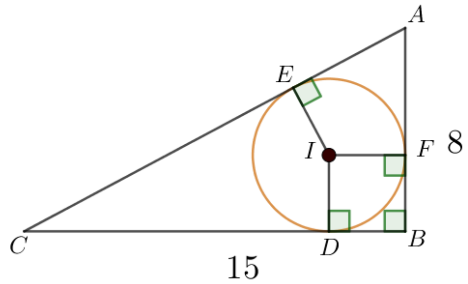
2-1 以數學史作為連結概念的媒介，讓學生體驗內切圓問題在古籍中的呈現方式</td>
<td>第二部分：今日課程

一、引入：
在《九章算術》第九章《勾股》篇中，
有一道問題如下：
「今有句八步，股十五步。問句中容圓，徑幾何？」

解釋：「徑」此處為直徑
Q1：有人記得畢氏定理的內容敘述與別稱嗎？
→問題中提及「勾」、「股」，
可知此三角形為直角三角形

Q2：請問此三角形的內切圓半徑為何？


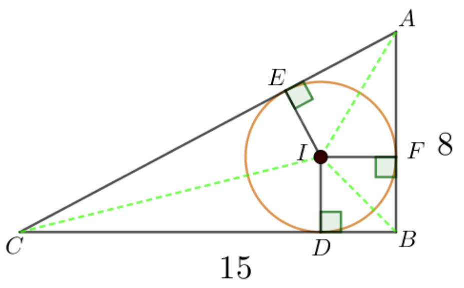
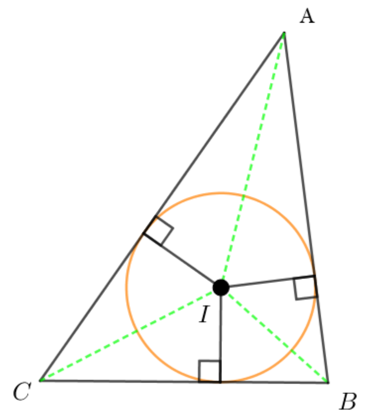
我們已知三角形面積為：$\frac{\textbf{底}\times\textbf{高}}{\mathbf{2}}$

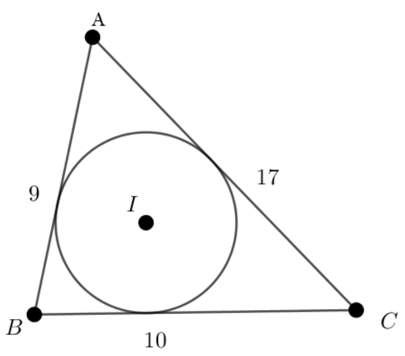
所以 ΔABC 面積為 $\frac{8\times15}{2}=60$
又因「三角形的內心至三角形三邊等距」，
且「三角形的內心為內切圓的圓心」
可做出下圖：

</td>
<td>

10</td>
<td></td>
<td>

先讓學生嘗試翻譯這道問題

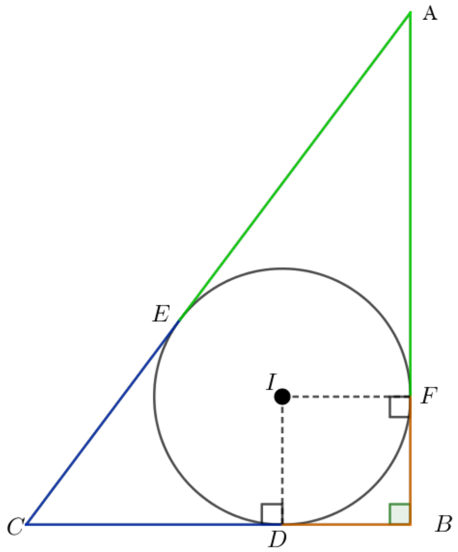
引導學生回想國二學習畢氏定理，曾介紹別稱叫做「勾股定理」</td>
</tr>
</table>

	再做出輔助線 $\overline{IA}$、$\overline{IB}$、$\overline{IC}$ ，將 ΔABC 分成三部分，即：ΔIAB、ΔIAC、ΔIBC  故 ΔABC 面積 $=\Delta AIB$面積$+\Delta BIC$面積$+\Delta CIA$ 面積 令 ΔABC 內切圓的半徑為 r $60=\frac{\overline{AB}\times r}{2}+\frac{\overline{BC}\times r}{2}+\frac{\overline{CA}\times r}{2}$ $=\frac{8\times r}{2}+\frac{15\times r}{2}+\frac{17\times r}{2}$ $=\frac{(8+15+17)\times r}{2}=\frac{40\times r}{2}$ $=20r$ $\therefore r=3$ ，因此此題直徑為 6			
1-4 以內切圓半徑與三角形周長證明三角形面積的公式	Q3：給定任意的三角形，可否利用三角形的周長與其內切圓半徑求出三角形的面積嗎？ 證明： 令 ΔABC 內切圓的半徑為 r，周長為 S  	8		由前述《九章》的問題

	ΔABC 面積 $=\Delta AIB$面積$+\Delta BIC$面積$+\Delta CIA$ 面積 $=\dfrac{\overline{AB}\times r}{2}+\dfrac{\overline{BC}\times r}{2}+\dfrac{\overline{CA}\times r}{2}$ $=\dfrac{(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})\times r}{2}=\dfrac{1}{2}rS$ 因此，可得出一個結論： $\boxed{\text{性質 1}}$： 若 ΔABC 內切圓的半徑為 r，周長為 S 則 ΔABC 面積為 $\frac{1}{2}rS$ 練習 a： 已知 I 為 ΔABC 的內心，ΔABC 面積為 36，$\overline{AB}=9$，$\overline{AC}=10$，$\overline{BC}=17$，求 ΔABC 的內切圓半徑 **Ans：2** 	6		中，求出直角三角形經驗與內心性質：「**三角形的內心至三角形三邊等距**」，且「**三角形的內心為內切圓的圓心**」兩個性質，引導學生證明
1-5 喚起學生圓外一點作出的兩切線等長 **1-6 推論出直角三角形的內切圓半徑**	Q4：對於直角三角形，是否有另一種方法求內切圓半徑呢？ 複習：圓外一點作出的兩條切線等長 由下圖，先將 A 點視為圓外一點，$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 為圓 I 的切線，分別交圓心於 E、F 則 $\overline{AE}=\overline{AF}$	12		藉由提問以及複習「圓外一點作出的兩條切線

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
若分別將 B、C 點視為圓外一點，也會得到相似的結果，即$\overline{BD}=\overline{BF}$、$\overline{CE}=\overline{CD}$

令內切圓的半徑為 r



$\because\ \angle ABC=\ \angle IFB=\ \angle IDB=90^\circ$
$\overline{IF}=\overline{ID}=r$，
故四邊形 $IFBD$ 為正方形，$\overline{IF}=\overline{ID}=r$

因此

$$\begin{aligned}\overline{AB}+\overline{BC}&=\left(\overline{AF}+\overline{FB}\right)+\left(\overline{BD}+\overline{DC}\right)\\&=\left(\overline{AE}+\overline{FB}\right)+\left(\overline{BD}+\overline{CE}\right)\\&=\left(\overline{AE}+r\right)+\left(r+\overline{CE}\right)\\&=\left(\overline{AE}+\overline{CE}\right)+2r=\overline{AC}+2r\end{aligned}$$

即：**直角三角形**中，兩股長$=$ 斜邊長 $+\,2r$

例題一：

(1) 已知直角 ΔABC 中，三邊長分別為 6、8、10，求 ΔABC 的內切圓半徑

(2) 已知等腰直角 ΔABC 兩股皆為 8，求 ΔABC 的內切圓半徑
</td>
<td>8</td>
<td></td>
<td>等長」性質</td>
</tr>
</table>

	第三部分：今日課程總結 性質一： 若 ΔABC 內切圓的半徑為 r，周長為 S 則 ΔABC 面積為 $\frac{1}{2}rS$ 性質二：直角三角形的內切圓半徑 給定**直角三角形** ΔABC，若其內切圓半徑為 r，則兩股長$=$ 斜邊長 $+2r$ 即 $r=\frac{\text{兩股長}-\text{斜邊長}}{2}$ 作業：完成學習單練習題 練習： (1) 已知直角 ΔABC 中，三邊長分別為 15、36、39，求 ΔABC 的內切圓半徑 (2) 已知等腰直角 ΔABC 兩股皆為 6，求 ΔABC 的內切圓半徑	5		

肆、教學評量

單元教學目標	評量方式	備註
1-1 理解三角形的內心為內切圓的圓心，亦為三內角之角平分線之交點	**口頭評量、實作評量**	
1-2 知悉三角形內心必定在三角形內部	**口頭評量、實作評量**	
1-3 認識數學古籍中關於直角三角形與內切圓的相關問題	**口頭評量、實作評量**	
1-4 以內切圓半徑與三角形周長證明三角形面積的公式	**學習單、實作評量**	
1-5 喚起學生圓外一點作出的兩切線等長	**口頭評量**	
1-6 推論出直角三角形的內切圓半徑	**學習單**	
2-1 以數學史作為連結概念的媒介，讓學生體驗內切圓問題在古籍中的呈現方式		情意部分不列入評量

附錄一：學習單

《九章・勾股》與三角形內心的邂逅

班級：　　　　座號：　　　　姓名：

一、複習前一堂提及的三角形內心（I）性質：

(1) 三角形的內心為**內切圓的圓心**

(2) 三角形的內心為**三內角之角平分線之交點**

(3) 三角形的**內心至三角形三邊等距**

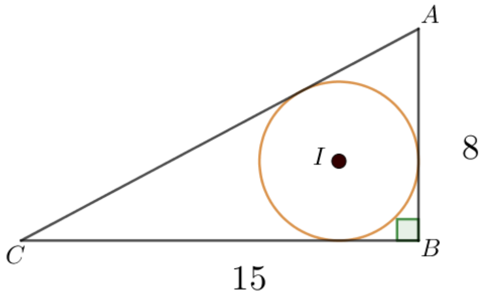
在《九章算術》第九章《勾股》篇中，有一道問題如下：

「今有句八步，股十五步。問句中容圓，徑幾何？」

解釋：「徑」此處為直徑

Q1：有人記得畢氏定理的內容敘述與別稱嗎？

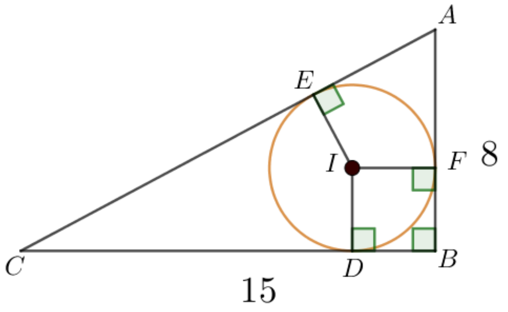
Q2：請問此三角形的內切圓半徑為何？



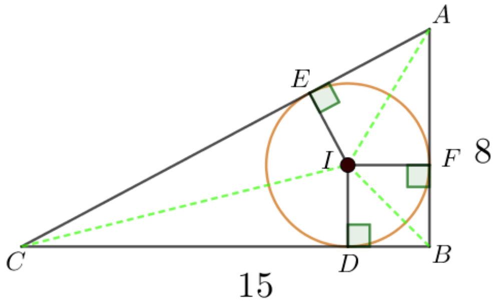
我們已知三角形面積為：$\frac{\text{底}\times\text{高}}{2}$，所以 ΔABC 面積為______________

又因「**三角形的內心至三角形三邊等距**」，且「**三角形的內心為內切圓的圓心**」

可做出下圖：



再做出輔助線 $\overline{IA}$、$\overline{IB}$、$\overline{IC}$ ，可將 ΔABC 分成三部分，即：ΔIAB、ΔIAC、ΔIBC



故 ΔABC 面積 $=\Delta AIB$面積$+\Delta BIC$面積$+\Delta CIA$ 面積

令 ΔABC 內切圓的半徑為 r

$$60=\frac{\overline{AB}\times r}{2}+\frac{\overline{BC}\times r}{2}+\frac{\overline{CA}\times r}{2}$$

$$=$$

$$=$$

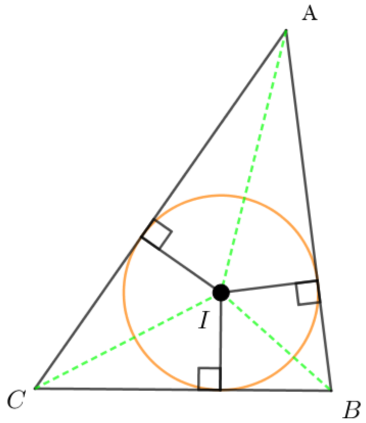
∴ ______ ，因此此題直徑為 ____

Q3：給定任意的三角形，可否利用三角形的周長與其內切圓半徑求出三角形的面積嗎？

$\boxed{\text{證明}}$：

由前述經驗，可利用「**三角形的內心至三角形三邊等距**」、「**三角形的內心為內切圓的圓心**」兩個性質，並做出輔助線，

令 ΔABC 內切圓的半徑為 r，周長為 S



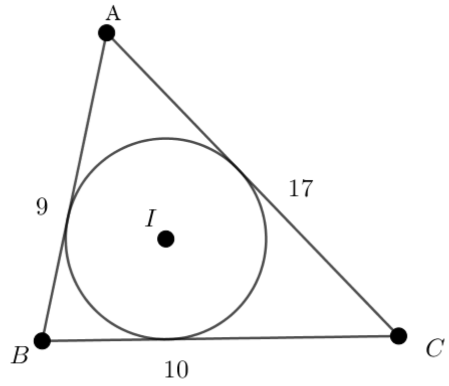
$$\begin{aligned}\Delta ABC \text{ 面積 } &=\Delta AIB\text{面積}+\Delta BIC\text{面積}+\Delta CIA\text{ 面積}\\&=\frac{\overline{AB}\times r}{2}+\frac{\overline{BC}\times r}{2}+\frac{\overline{CA}\times r}{2}\\&=\frac{(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})\times r}{2}=\frac{1}{2}rS\end{aligned}$$

因此，可得出一個結論：

$\boxed{\text{性質 1}}$：若 ΔABC 內切圓的半徑為 r，周長為 S，則 ΔABC 面積為 $\frac{1}{2}rS$

練習 a：

已知 I 為 ΔABC 的內心，ΔABC 面積為 36，$\overline{AB}=9$，$\overline{AC}=10$，$\overline{BC}=17$，求 ΔABC 的內切圓半徑



Q：對於直角三角形，是否有另一種方法求內切圓半徑呢？

複習：圓外一點作出的兩條切線等長

先將 A 點視為圓外一點，$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 為圓 I 的切線，分別交圓心於 E、F，則 $\overline{AE}=\overline{AF}$

若分別將 B、C 點視為圓外一點，也會得到相似的結果，即 ____________________

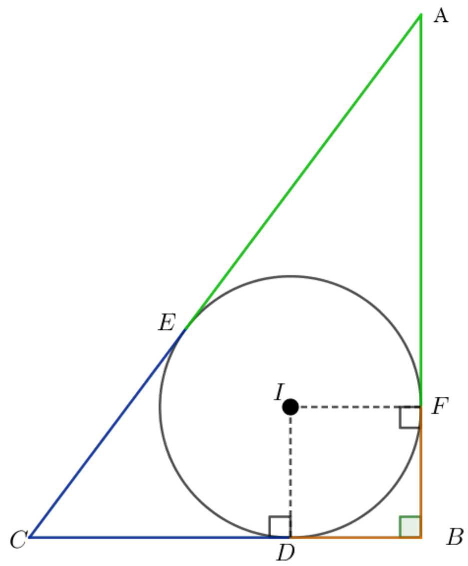
令內切圓的半徑為 r

$\because\ \angle ABC=\ \angle IFB=\ \angle IDB=90^\circ$，$\overline{IF}=\overline{ID}=r$，

故四邊形 $IFBD$ 為正方形，$\overline{IF}=\overline{ID}=r$

因此
$$\begin{aligned}\overline{AB}+\overline{BC}&=\left(\overline{AF}+\overline{FB}\right)+\left(\overline{BD}+\overline{DC}\right)\\&=\left(\overline{AE}+\overline{FB}\right)+\left(\overline{BD}+\overline{CE}\right)\\&=\left(\overline{AE}+r\right)+\left(r+\overline{CE}\right)\\&=\left(\overline{AE}+\overline{CE}\right)+2r=\overline{AC}+2r\end{aligned}$$

即：**直角三角形**中，兩股長$=$ 斜邊長 $+\,2r$



例題一：

(1) 已知直角 ΔABC 中，三邊長分別為 6、8、10，求 ΔABC 的內切圓半徑

(2) 已知等腰直角 ΔABC 兩股皆為 8，求 ΔABC 的內切圓半徑

練習 b：

(1) 已知直角 $\triangle ABC$ 中，三邊長分別為 15、36、39，求 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑

(2) 已知等腰直角 $\triangle ABC$ 兩股皆為 6，求 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑

參考資料：

1. 南一書局企業股份有限公司（2024）。國中數學課本第五冊。臺南市：南一書局企業股份有限公司。
2. 康軒文教事業股份有限公司（2024）。國中數學課本第五冊。臺北市：康軒文教事業股份有限公司。
3. 教育部（2018）。**十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校-數學領域**。臺北：國家教育研究院。
4. 《算經十書》（2001）。(郭書春、劉鈍校點)。臺北。九章出版社
5. 翰林出版事業股份有限公司（2024）。國中數學課本第五冊。臺南市：翰林出版事業股份有限公司。