

【附件 2】參賽作品封面

## 113 學年度數學教學演示競賽活動封面

組 別：小學組 中學組

編 號：\_\_\_\_\_（由承辦單位填寫）

作品名稱：平面上兩點距離

注意事項：

1. 參賽作品封面請勿書寫校名及作者名。
2. 請在光碟片上書寫作品名稱(勿寫校名及作者名)。

【附件 4】

113 學年度數學教學演示競賽活動

教案設計格式範例

壹、設計理念

平面上兩點距離的計算是畢氏定理的延伸應用，我不希望學生單純記憶兩點距離公式，而是了解公式背後的由來，當他們不記得公式時，也能夠使用畢氏定理的想法去計算出兩點距離。

課堂利用人行穿越道的生活例子引入，利用距離讓學生思考如果兩點是非同時在鉛垂或水平線上的兩點可以如何計算，藉由這兩個問題引出我們的需求，在利用教室中常見的經驗讓學生試著去找出因傳法不同而造就傳的距離不同，如何計算與確定距離上的長與短，在畫圖的過程中自然地探索出兩點距離其線段會由一個會多個直角三角形的斜邊而組成。

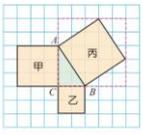
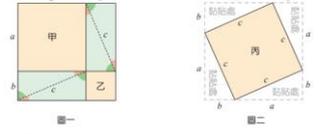
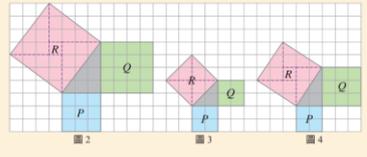
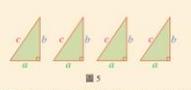
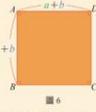
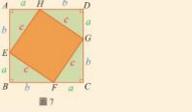
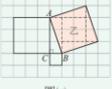
結果是經由討論與操作發現的，因此能加深印象，而非單純記憶公式，理解計算平面上的兩點距離其實是在學習畢氏定理的應用而非新的公式。

貳、教學分析

一、教材分析

	翰林	康軒	南一
引入方式	畢氏定理- 利用畢達哥拉斯漫畫故事，說明他意外發現磁磚面積的組成。 平面上兩點的距離- 文字描述的方式複習數線上兩點距離的計算。	畢氏定理- 古埃及利用直角三角形的斜邊進行測量。 直角坐標平面上兩點的距離公式- 文字描述的方式複習數線上兩點距離的計算。	畢氏定理- 方格圖中畫出一個直角三角形與三邊外接正方形讓學生去計算面積。 距離公式- 拋出一個需求-遊樂園的園區彼此之間的距離。
課本順序	直角三角形三邊名詞 畢達哥拉斯漫畫故事 磁磚面積 探索活動 畢氏定理統整	引入-古埃及直角三角形測量長度 直角三角形三邊名詞 探索活動 畢氏定理統整	引入-直角三角形三邊面積計算 直角三角形三邊名詞 探索活動 畢氏定理統整
按順序排列	例題-求斜邊 例題-求一股 例題-兩個直角三角形的複合圖 例題-斜邊上的高	畢達哥拉斯故事 例題-求斜邊、股 例題-一個直角三角形切割成兩三角形的複合圖形 例題-正方形對角線計算	畢氏定理相關故事與郵票 例題-求斜邊與複合圖形 例題-斜邊上的高 斜邊判斷 探索活動-畫出根號五

由上至	統整直角三角形的高 應用問題-移梯子 應用問題-吸管杯子 應用問題-電子產品尺寸 應用問題-圖形比例 複習-數線上兩點距離 例題-水平、鉛垂、斜的兩點距離 代數推論兩點公式 例題-平面上兩點距離公式應用 影印紙的比例。	例題-等腰三角形高與面積 例題-正三角形高與面積 例題-正三角形複合圖 例題-三角形斜邊上的高 應用問題-移桿子 複習-數線上兩點距離 例題-水平、鉛垂 例題-斜的兩點距離 代數推論兩點公式 例題-平面上兩點距離公式應用	例題-找出根號 a 的點 應用問題-電子產品尺寸 探索問題-木板過門 應用問題-移梯子 距離公式引入-遊樂園園區距離 複習-數線上兩點距離 例題-水平、鉛垂 代數推論兩點公式 例題-平面上兩點距離公式應用 例題-遊樂園園區距離
-----	--	---	--

探索活動	<p><b>探索活動 直角三角形斜邊與兩股的關係</b> (可搭配附件 4)</p> <p>圖中每個小方格的邊長都是 1，且直角三角形 ABC 的兩股分別為 2 與 3。</p>  <p>(1) 如圖，正方形甲與正方形乙的面積分別為何？</p> <p>(2) 如圖，丙是一個正方形，其面積為何？</p> <p>(3) 正方形甲與正方形乙的面積和是否等於正方形丙的面積？</p> <p><b>探索活動 畢氏定理</b></p> <p>圖一、圖二是兩個大小相同的正方形，附件 4 的四個三角形貼紙為圖一中的四個三角形，將其黏貼到圖二正方形的四個角落。</p>  <p>(1) 丙是否為正方形？它的邊長為何？</p> <p>(2) 甲正方形的面積 + 乙正方形的面積是否與丙的面積相等呢？</p> <p>(3) 由(1)、(2)的結果判別 <math>a^2 + b^2</math> 與 <math>c^2</math> 的大小關係。</p>	<p>直角三角形有什麼特別的性質呢？我們來看下面的問題探索。</p> <p><b>問題探索 探討直角三角形三邊長的特殊關係</b></p> <p>圖 2~圖 4 灰色區域皆為直角三角形，依照直角三角形的三邊長所畫出的四邊形皆為正方形，每個小方格的邊長皆為 1，回答下列問題。</p>  <p>1. 根據圖 2~圖 4，計算各正方形區域的面積，並完成表格。</p> <table border="1" data-bbox="662 1064 1005 1153"> <thead> <tr> <th></th> <th>P 的面積 (藍色區域)</th> <th>Q 的面積 (綠色區域)</th> <th>R 的面積 (紅色區域)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>圖 2</td> <td>9</td> <td>16</td> <td>25</td> </tr> <tr> <td>圖 3</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>圖 4</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>2. 承 1.，圖 2~圖 4 中，<math>P \cdot Q \cdot R</math> 的面積有什麼關係？</p> <p><b>附件 4</b></p> <p><b>問題探索 探討直角三角形三邊長的特殊關係</b> (可搭配附件 4 操作)</p> <p>圖 5 是 4 個相同的直角三角形，三邊長分別為 <math>a \cdot b \cdot c</math>。</p>  <p>圖 6 是邊長為 <math>(a+b)</math> 的正方形 ABCD。</p>  <p>將圖 5 中的 4 個直角三角形，依圖 7 的方式放到正方形 ABCD 上。</p>  <p>回答下列問題：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>四邊形 EFGH 是否為正方形？</li> <li>由圖 7 可知，四邊形 EFGH 面積等於正方形 ABCD 面積減去 4 個直角三角形面積。試以 <math>a \cdot b \cdot c</math> 表示此關係。</li> <li>化簡 2. 的算式，是否會得到 <math>c^2 = a^2 + b^2</math> 的關係？</li> </ol>		P 的面積 (藍色區域)	Q 的面積 (綠色區域)	R 的面積 (紅色區域)	圖 2	9	16	25	圖 3				圖 4				<p><b>畢氏定理的發現</b></p> <p>在下圖(一)中是一個等腰直角三角形，分別以此等腰直角三角形的兩股為邊長作兩正方形，這兩個正方形面積和與正方形甲的面積有何關係？</p>  <p>圖(一)</p> <p>答：_____；此時 <math>AC^2 + BC^2</math> _____ <math>AB^2</math>。(填入 &lt;、= 或 &gt;)</p> <p>在下圖(二)中，分別以此直角三角形的兩股為邊長作兩正方形，這兩個正方形面積和與正方形乙的面積有何關係？</p>  <p>圖(二)</p> <p>答：_____；此時 <math>AC^2 + BC^2</math> _____ <math>AB^2</math>。(填入 &lt;、= 或 &gt;)</p>
	P 的面積 (藍色區域)	Q 的面積 (綠色區域)	R 的面積 (紅色區域)																
圖 2	9	16	25																
圖 3																			
圖 4																			

自我評量	圖形上求直角三角形的任一邊 求斜邊上的高 求根號三的点 應用問題-跨海大橋計算 平面座標上兩點距離計算	文字描述直角三角形中的兩邊，求第三邊。 斜邊上的高。 應用問題-日月潭纜繩計算。 正三角形與正方形的複合圖形邊常計算。	文字描述直角三角形中的兩邊，求第三邊。 直角三角形複合圖形邊常計算。 斜邊上的高。 兩點間距離計算。
------	---	--	---

		應用問題-卡丁車兩點距離	應用問題-公園盪鞦韆
差異	循序漸進將所有畢氏定理的例題一一列出讓學生這個觀念會了才再加入新的題型。 多了影印紙的生活例子並說明大小名稱的由來。	自我評量中多了挑錯的題型讓學生釐清觀念。 多了各類型三角形的高與面積計算。 圖片題型的計算較多。 有提及勾股定理的由來。 用問題探索的方式引出平面上兩點距離公式的推導。	利用數學圖形複習作為引入。 平面上兩點距離在引入時利用生活情境讓學生對學習此知識有所需求。

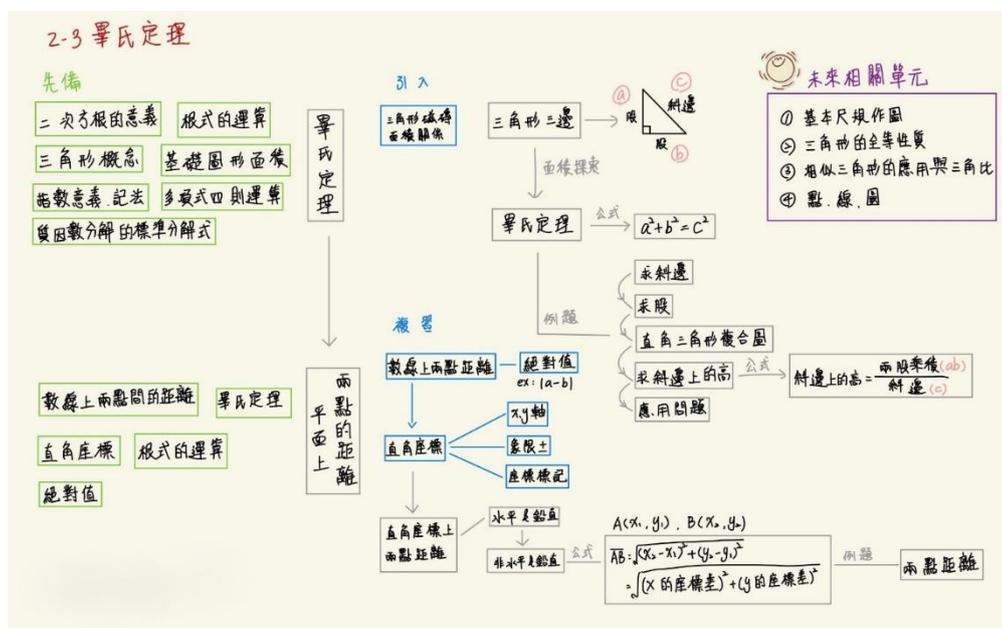
## 二、學生分析

班上有三分之一的學生有補習，所以進度超前也已學習過平面上兩點距離公式。三分之一的學生上課認真聽講後能自行利用所學知識做基礎題型與簡易的變化題。剩下三分之一的學生需要多加提醒與講解才能夠熟悉知識與操作。

## 三、教學方法分析

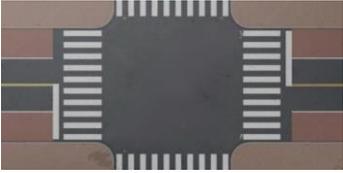
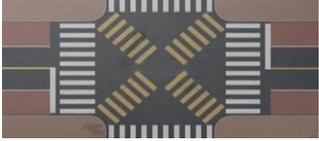
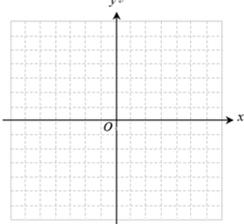
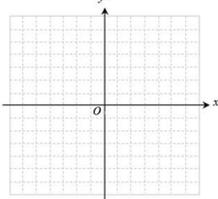
使用分組活動目的是讓學生自行探索，藉由生活例子產生共感，進而加深印象與思考的動力，但避免學生失焦於數學課堂，老師要和學生一起總結活動結果，並且適時於活動中練習，確認學生於活動中有學習到老師所期望所學的知識。藉由分組練習，也可以讓學生遇到問題時可以即時與組員討論，讓學生有更好的學習效果。

## 四、課程概念架構圖



## 參、教學活動設計

單元名稱	平面上兩點距離	適用年級	八年級		
課程名稱	平面上兩點距離	教學時間	45 分鐘		
教材版本	翰林、康軒				
教學準備	自製學習單、課本例題與隨堂練習配合使用				
能力指標/學習表現	分年細目/學習內容		單元教學目標		
s-IV-7 理解畢氏定理與其逆敘述，並能應用於數學解題與日常生活的問題。	G-8-1 直角坐標系上兩點距離公式：直角坐標系上兩點 $A(a, b)$ 和 $B(c, d)$ 的距離為 $\overline{AB} = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$ ；生活上相關問題。		1. 直線距離 2. 平面上兩點(水平線上、鉛垂線上)距離計算 3. 如何計算平面上非水平線上、鉛垂線上的兩點距離。 4. 平面上兩點距離公式		
單元教學目標	教學內容		時間(分鐘)	評量方式	備註
複習畢氏定理	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ 方法：提問</li> <li>◆ 表徵：圖形、公式</li> <li>◆ 工具：黑板</li> <li>◆ 內容：複習畢氏定理與斜邊如何計算。</li> </ul>		2	問答	
說明主題-平面上的兩點距離	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ 方法：討論、提問</li> <li>◆ 表徵：圖形、生活事物</li> <li>◆ 工具：投影片</li> <li>◆ 內容：               <p>今天課程主題是座標上的兩點距離，那我們先來討論什麼是兩點距離？</p> <p>下面這張圖是我們在路上會看到的斑馬線圖，我們想從 A 點走到 B 點可議怎麼走法？(圖一)</p> <p>那為什麼有的路口會多了十字斑馬線呢？(圖二)</p> <p>比較快→距離比較短→直線距離所以我們今天所要討論的兩點距離就是說這兩點的線段距離。</p> </li> </ul>		3		

	<p>(圖一)</p>  <p>(圖二)</p> 			
<p>複習- 數線距離計算 實際座標兩點水平 與鉛直計算計算</p>	<p>在數線上，如果想要計算A(2)到B(-1)的距離7 可以用什麼方法？(絕對值、用<math>2-(-1)</math>)，兩 點座標相減加上絕對值就是兩點距離，絕對 值計算出來的數都是正數。 那現在我們把數線擴展成直角座標，想想看 A(2, 3)到B(-4, 3)兩點距離為多少？可以怎 麼計算？ 詢問這兩點的連線是水平還是鉛垂線呢？ 可以想像成數線去計算距離。(帶入絕對值的 觀念)學生隨堂練習操作。</p> <p>例題1 (1)求出A(2,3)、B(-4,3)兩點的距離。</p>  <p>例題1 (2)求出C(-2,5)、D(-2,1)兩點的距離。</p> 	7	問答、課 本隨堂 練習	
<p>生活模擬座標的距 離計算</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ 方法：討論、講述</li> <li>◆ 表徵：圖像、數值、生活實例</li> <li>◆ 工具：簡報、學習單</li> <li>◆ 內容： 那想想看，如果我想計算非在水平或是</li> </ul>	13	學習單 練習、小 組討論 統整	

鉛錘的兩點距離可以怎麼匯呢？我們來看看下面這個生活情境。

小明發現小濠的聯絡簿被誤放到第二排中，所以想要將聯絡簿傳回給小濠，每個座位上都有同學，也都知道要傳給小濠，想想看可以怎麼傳？

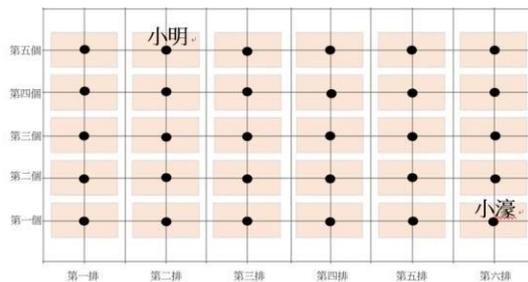
任務一、討論可能路線(討論)

任務二、找尋最短與最長的路線與其距離(討論、統整)學生將討論結果紀錄在大座位表上。

任務三、觀察直線距離可以視為直角三角形的斜邊(提問)

那我們可以藉由知道直角三角形的兩股，利用畢氏定理計算出兩點(非水平與鉛直)距離。

因為我們需要先有兩股的長度，那就先來學如何計算水平與鉛垂的兩點距離。



實際座標兩點計算

- ◆ 方法：問答、講述、學生練習
- ◆ 表徵：圖像、數值實例
- ◆ 工具：座標圖、學習單、隨堂練習(P. 104)
- ◆ 內容：
 

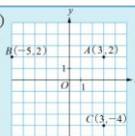
三點形成直角三角形，兩點距離也就是直角三角形的斜邊，那我們可以利用畢氏定理算出兩點距離。

學生隨堂練習操作。

例 2 水平線或鉛垂線上兩點的距離

如圖：已知坐標平面上  $A(3, 2)$ 、 $B(-5, 2)$ 、 $C(3, -4)$  三點，求：

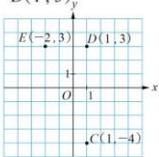
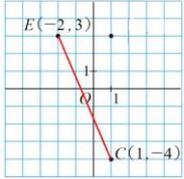
- (1)  $\overline{AB}$  與  $\overline{AC}$  的長。
- (2)  $\overline{BC}$  的長。



解

6

問答、課本隨堂練習

	<p> <b>隨堂練習</b></p> <p>如圖，已知坐標平面上 <math>C(1, -4)</math>、<math>D(1, 3)</math>、<math>E(-2, 3)</math> 三點，求：</p> <p>(1) <math>CD</math> 與 <math>DE</math> 的長。</p> <p>(2) <math>CE</math> 的長。</p> <p><b>解</b></p> 			
<p>兩點距離公式引出</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ 方法：問答、講述、類比</li> <li>◆ 表徵：圖像、數學公式</li> <li>◆ 工具：座標圖、學習單、隨堂練習(P. 104)</li> <li>◆ 內容：</li> </ul> <p>(用隨堂練習的圖)那現在如果題目直接問我們要求這兩點的距離，想想我們剛剛都是找出直角三角形，那有沒有同學發現到，其實我們求出來的這兩股距離，分別是這兩點的什麼？</p> <p>藉由平移發現兩點水平距離的差與鉛垂距離的差。(X 座標的差與 Y 座標的差)</p> <p>直接在圖上用代數表示並推出公式。再帶入例題用公式解。公式說明、例題說明、學生練習隨堂練習。</p> <p>想想看，剛剛是如何計算出 <math>EC</math> 距離？</p> <p style="text-align: center;">兩點距離公式—</p> <p style="text-align: center;"><math>\sqrt{(\text{兩點} \quad \text{的差})^2 + (\text{兩點} \quad \text{的差})^2}</math></p> 	7	問答、課本隨堂練習	
<p>兩點距離公式練習</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ 方法：講述、學生練習</li> <li>◆ 表徵：數值實例、數學公式</li> <li>◆ 工具：座標圖、學習單、隨堂練習(P. 104)</li> <li>◆ 內容：</li> </ul> <p>例題用公式解。</p> <p>學生練習隨堂練習。</p> <p><b>例 3 兩點距離</b></p> <p>已知坐標平面上 <math>A(2, 1)</math>、<math>B(-4, 9)</math> 兩點，求 <math>AB</math> 的長。</p> <p><b>解</b></p> <p> <b>隨堂練習</b></p> <p>已知坐標平面上 <math>C(-2, 0)</math>、<math>D(-7, 13)</math> 兩點，求 <math>CD</math> 的長。</p> <p><b>解</b></p>	5	課本隨堂練習	

今日課程複習	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ 方法：問答</li> <li>◆ 表徵：公式</li> <li>◆ 工具：座標圖</li> <li>◆ 內容： 今日課程重點是什麼？公式是什麼？如果忘記公式，我可以把兩點距離想像成直角三角形的什麼邊？所以我們要先找出兩股距離，這也就是我們公式的原理。</li> </ul>	2	提問	
--------	---	---	----	--

### 肆、教學評量

單元教學目標	評量方式	備註
了解平面上兩點距離的計算想法是可以利用直角三角形斜邊計算而成。	分組討論與報告、學習單	
計算平面上兩點距離(包含在同一水平線上、同一鉛垂線上、非水平與鉛垂線上的兩點)	學習單、課本隨堂練習與自我評量	
應用兩點距離計算公式	學習單、課本隨堂練習與自我評量	

**活動一**

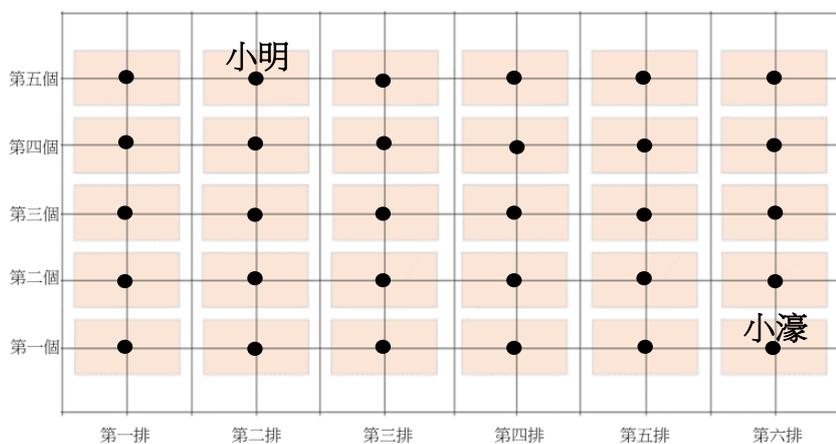
小明發現小濠的聯絡簿被誤放到第二排中，所以想要將聯絡簿傳回給小濠，每個座位上都有同學，也都知道要傳給小濠，想想看可以怎麼傳？記錄在方格紙中，此為邊長1單位正方形的方格紙。附圖為班級座位表，小明的座位在第二排第五個，小濠在第六排第一個。

**任務一**

請在大座位圖上畫出三種不同的傳法，再完成以下的問題。

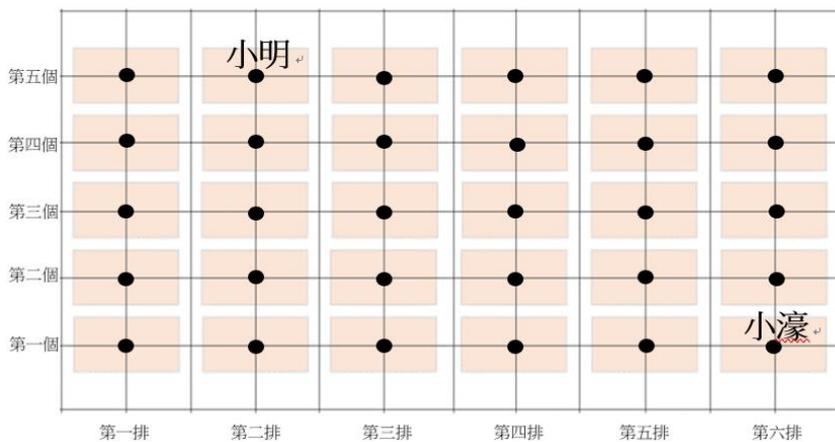
**任務二**

(1) 請畫出傳法最長的路線，並於空白處計算出距離為多少單位？ \_\_\_\_\_ 單位



\* 請用藍色白板筆將小組討論結果記錄在大座位表上。

(2) 請畫出傳法最短的路線，並於空白處計算出距離為多少單位？ \_\_\_\_\_ 單位



\* 請用紅色白板筆將小組討論結果記錄在大座位表上。

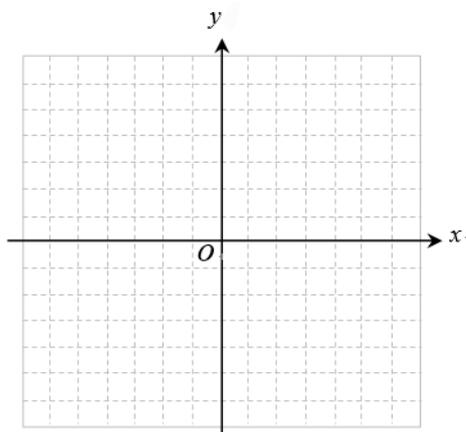
**任務三**

(1) 觀察看看兩條路線形成了什麼形狀呢？ \_\_\_\_\_ 。

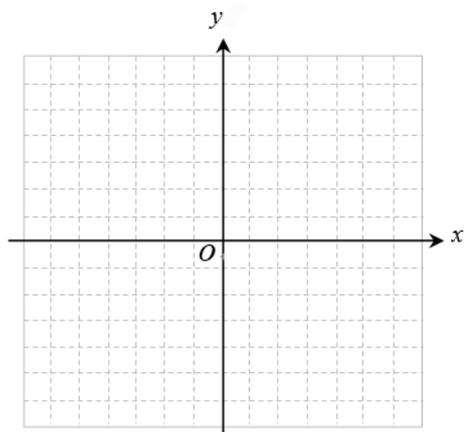
### 例題 1

請在圖上標示各點位置，並求出兩點的距離。

(1)  $A(2,3)$ 、 $B(-4,3)$



(2)  $C(-2,5)$ 、 $D(-2,1)$



### 隨堂練習

求出下列各小題中兩點的距離。

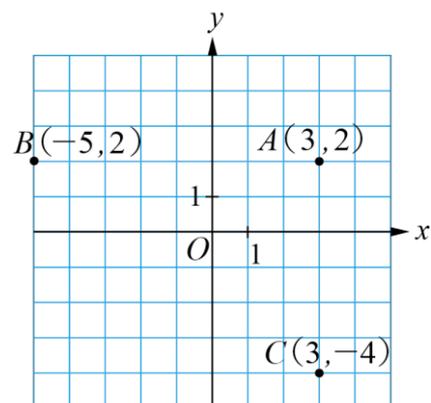
(1)  $A(1,-4)$ 、 $B(5,-4)$

(2)  $C(3,6)$ 、 $D(3,-4)$

### 例題 2

如圖，已知坐標平面上  $A(3, 2)$ 、 $B(-5, 2)$ 、 $C(3, -4)$  三點，

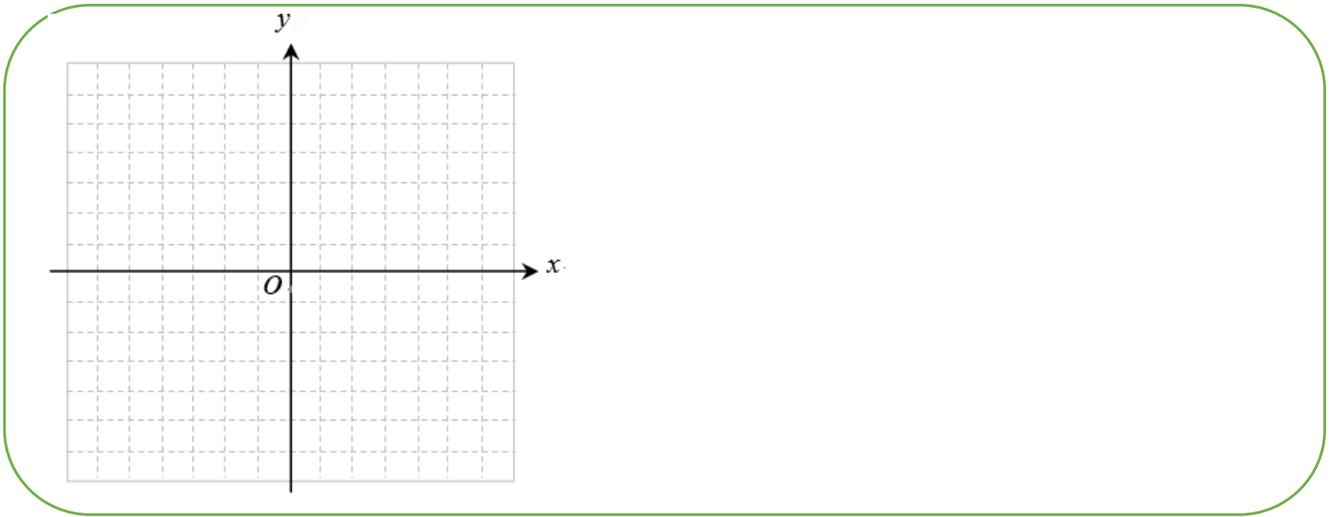
求：(1)  $\overline{AB}$  與  $\overline{AC}$  的長。 (2)  $\overline{BC}$  的長。



### 想想看

根據前面的練習，你覺得座標上兩點距離是如何計算出來的呢？在空白處說明你的想法。

$$\begin{aligned} \text{兩點距離公式} &= \sqrt{(\text{兩點} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{的差})^2 + (\text{兩點} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{的差})^2} \\ &= \sqrt{(\quad \quad \quad)^2 + (\quad \quad \quad)^2} \end{aligned}$$



### 例題 3

已知坐標平面上  $A(2, 1)$ 、 $B(-4, 9)$  兩點，求  $\overline{AB}$  的長。

### 例題 4

已知坐標平面上  $A(-3, -2)$ 、 $B(5, -2)$ 、 $C(1, 5)$  三點，試問：

- (1) 三角形  $ABC$  是否為等腰三角形？
- (2) 三角形  $ABC$  的周長是多少？

