

113 學年度數學教學演示競賽活動

教案設計格式範例

壹、設計理念

本單元為 108 新課綱中增加的內容，學生在國中階段僅學過一次函數及二次函數，三次函數圖形對於學生而言相對難以想像圖形的樣貌。因此，教師設計數學軟體 Geogebra 讓學生操作，了解三次函數圖形的樣貌以及其對稱性。在課程的最一開始先從最簡單的單項三次函數作介紹，讓學生透過描點法練習畫出三次函數的圖形，並且透過 Geogebra 協助繪圖可以發現三次函數是一個平滑的曲線。再藉由旋轉紙張及旋轉 Geogebra 的圖形觀察了解到三次函數為點對稱圖形，並補充說明奇函數的代數式。最後，進入到三次項加一次項的三次函數，利用 Geogebra 輔助讓學生了解此類型的三次函數也是奇函數。

貳、教學分析

一、教材分析

1. 本單元在整個國中或高中數學學習的重要性

三次函數在高中數學學習時可以提高繪製圖形的能力，透過繪製圖形的方式同時觀察圖形的特徵；也可以了解三次函數的大域特徵及一次近似的概念，在高一的階段讓學生稍微認識微觀的概念。此外，三次函數在三年級的教材中會再次提到關於極值、反曲點、嚴格遞增、嚴格遞減等的函數概念，因此在一年級所學習的三次函數圖形為重要的基礎。

2. 學習本單元需要的先備知識

S-7-4 線對稱的性質：對稱線段等長；對稱角相等；對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分。

F-8-1 一次函數：透過對應關係認識函數（不要出現 $f(x)$ 的抽象型式）、常數函數（ $y = c$ ）、一次函數（ $y = ax + b$ ）。

F-8-2 一次函數的圖形：常數函數的圖形；一次函數的圖形。

F-9-2 二次函數的圖形與極值：二次函數的相關名詞（對稱軸、頂點、最低點、最高點、開口向上、開口向下、最大值、最小值）；描繪 $y = ax^2$ 、 $y = ax^2 + k$ 、 $y = a(x - h)^2$ 、 $y = a(x - h)^2 + k$ 的圖形；對稱軸就是通過頂點（最高點、最低點）的鉛垂線； $y = ax^2$ 的圖形與 $y = a(x - h)^2 + k$ 的圖形的平移關係；已配方好之二次函數的最大值與最小值。

G-10-1 坐標圖形的對稱性：坐標平面上，對 x 軸，對 y 軸，對 $y = x$ 直線的對稱，對原點的對稱。

F-10-1 一次與二次函數：從方程式到 $f(x)$ 的形式轉換，一次函數圖形

與 $y = mx$ 圖形的關係，數線上的分點公式與一次函數求值。用配方將二次函數化為標準式，二次函數圖形與 $y = ax^2$ 圖形的關係，情境中的應用問題。

3. 學習本單元與未來學習的關聯

F-10-3 多項式不等式：解一次、二次、或已分解之多項式不等式的解區間，連結多項式函數的圖形。

4. 課綱條目

F-10-2 三次函數的圖形特徵：二次、三次函數圖形的對稱性，兩者圖形的大域（global）特徵由最高次項決定，而局部（local）則近似一條直線。

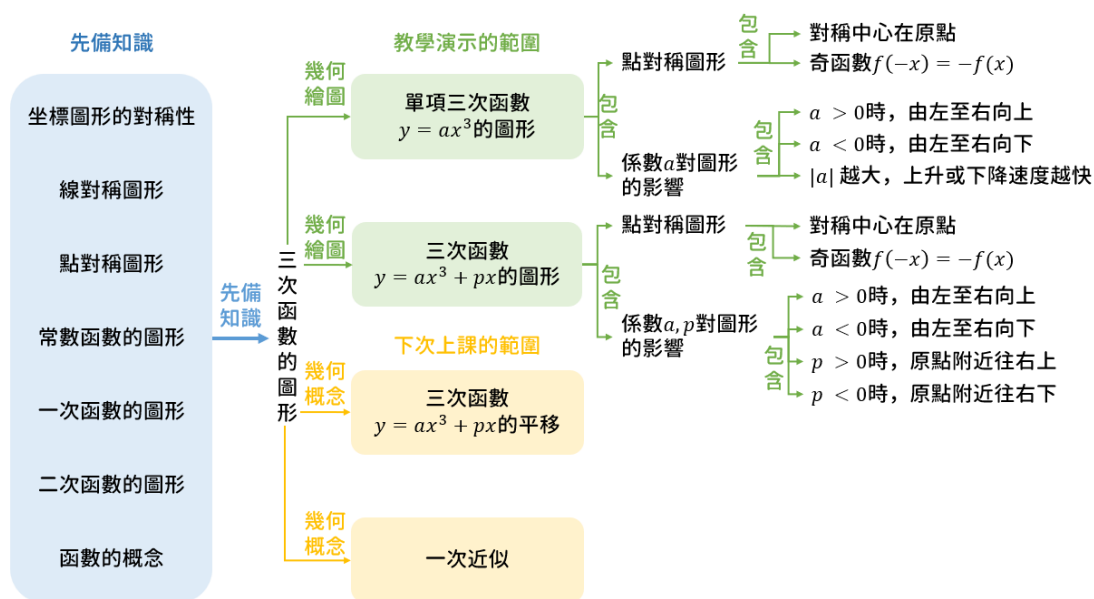
二、學生分析

1. 學生程度：尚能理解課程內容，對於基本概念知識較不熟悉，遇到沒有看過的題目便會不知如何下手。
2. 學習態度：大部分學生上課認真聽課抄筆記，偶有學生在寫數學科作業。
3. 班級氣氛：較害羞，少數幾位同學願意勇敢回應教師；在與同學討論時會稍微熱絡一點。

三、教學方法分析

1. 課程主要依照翰林版的編排順序進行講述。
2. 教學課程中使用數學線上軟體 Geogebra 讓學生觀察三次函數的圖形。
3. 搭配學習單撰寫觀察紀錄，寫下自行操作數學線上軟體 Geogebra 的操作過程及結果。

四、課程概念架構圖



參、教學活動設計

單元名稱	多項式函數的圖形與多項式不等式	適用年級	高中一年級
課程名稱	三次函數的圖形	教學時間	50 分鐘
教材版本	翰林版		
教學準備	1. 初步透過軟體大致了解三次函數圖形的樣貌。 2. 了解點對稱圖形的特性，並認識奇函數。		
能力指標/學習表現	分年細目/學習內容	單元教學目標	
f-V-2 認識多項式函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以多項式函數為數學模型的關係或現象，並能用以溝通和解決問題。 a-V-1 理解多項式、分式與根式對應實數之運算規則，理解指數、對數的運算規則，並能用於數學推論。 g-V-5 理解並欣賞坐標系統可為幾何問題提供簡潔的算法，而坐標的平移與伸縮可以簡化代數問題，能熟練前述操作，並用以推論及解決問題。	F-10-2 三次函數的圖形特徵：二次、三次函數圖形的對稱性，兩者圖形的大域（global）特徵由最高次項決定，而局部（local）則近似一條直線。	能辨別多項式的圖形特徵，並能用其當作模型而解決典型問題。	

單元教學目標	教學內容	時間	評量方式	備註
複習線型函數及二次函數的圖形	- 教師利用學習單上$f(x) = x$、$f(x) = x^2$的圖形，隨機抽選學生提問上述函數分別為線對稱圖形還是點對稱圖形，並且詢問他們是如何判斷出來的。 - 複習線對稱圖形及點對稱圖形的幾何特性及代數特性。線對稱圖形：對折後圖形重疊即為線對稱圖形；若函數滿足$f(-x)=f(x)$時，函數圖形$y = f(x)$有對稱軸y軸。點對稱圖形：圖形旋轉180°後與原圖形重疊即為點對稱圖形；若函數滿足$f(-x) = -f(x)$時，函數圖形$y = f(x)$有對稱中心原點。 - 數學史小故事，簡述十六世紀時費羅與塔爾塔莉亞的三次方程式的競賽。以此來銜接單項三次函數與三次項加二次項的兩種函數圖形。 - 以上一小節所提到的函數圖形作為引入，並提問若是到了三次函數是否還是一個對稱圖形呢？	5分鐘	- 思考教師所提出的問題 - 填寫學習單上問題	學習單如附件。搭配學習單第一頁上半部。
畫出單項三次函數的圖形	- 在判斷三次函數是否為對稱圖形之前，要先知道三次函數的圖形長什麼樣子，因此我們要先來練習畫出三次函數的圖形，並用最簡單的$f(x) = x^3$來練習。 - 教師使用 Geogebra 及大屏畫出單項三次函數的圖形，隨機抽出 2 名學生，請學生講出兩個在函數$f(x) = x^3$上的點。 - 先使用兩點連成一線的方式畫圖，便會發現$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$雖然在線上，但$\frac{1}{2}$不是$f(x) = x^3$的函數值。	15分鐘	- 練習使用描點法畫圖，並且自行在學習單上實際操作一次。 - 使用學習單自行探索$f(x) = x^3$是否為對稱圖形，學生可以使用圖形的檢驗方式對折或旋轉方格紙來判斷。	搭配學習單第一頁下半部

	● 使用 Geogebra 滑桿的功能，多畫幾個點之後便會發現三次函數是一個平滑的曲線。 ● 給學生一分鐘的時間，利用課本最後兩頁的方格紙讓學生練習畫圖，使用描點法畫出 $f(x) = x^3$ 的圖形。請同學之間互相欣賞鄰桌同學所畫出來的圖形。 ● 0 到 1 附近的函數值是緩慢的向上的，以數字舉例，$f(0.1) = 0.001$ 跟 $f(0.2) = 0.008$ 函數值的差並不大，因此上升速度較慢，會貼著 x 軸走。 ● 教師問：「三次函數圖形是不是一個對稱圖形？」 ● 學生利用方格紙探索單項三次函數是否為對稱圖形，可以試著用圖形檢驗的方式對折、旋轉方格紙。教師使用 Geogebra 旋轉圖形，也可以觀察出來單向三次函數是一個點對稱圖形。 ● 接著進行代數檢驗，圖形看起來對稱於原點，因此教師使用 Geogebra 在 $f(x) = x^3$ 的圖形上隨機點一個點，接著使用 Geogebra 的功能對稱於原點，即可發現對稱點也在圖形上。 ● 最後使用特殊代數式 $f(-x) = -f(x)$，來說明函數圖形 $f(x) = x^3$ 的對稱中心真的在原點。		● 回答教師所提出的問題。	
三次項係數對圖形 $f(x)$ 的影響	● 前面有討論出了 $f(x) = x^3$ 是一個對稱中心在原點的點對稱圖形，如果 x^3 前面加上一個係數 a，那這個新的圖形還會是點對稱圖形嗎？ ● 使用 Geogebra 示範如何操作，並且先用 $f(x) = 2x^3$ 判斷是否為點對稱圖形。採用圖形檢驗及代數檢驗的方式，即可發現 $f(x) = 2x^3$ 亦為點對稱圖形。	15 分鐘	● 與鄰桌同學一起討論完成學習單 ● 練習操作 Geogebra ● 觀察 Geogebra 上的圖形，講出 a 的正負以	搭配學習單第二頁

	- 給學生 3 分鐘時間，練習操作 Geogebra，並且判斷 $f(x) = x^3$ 是否為點對稱圖形。 - 使用實際數值帶入。例：(1, 2) 和 (-1, -2) 可以換個形式寫成 $2=f(1)$ 和 $-2=f(-1)$，最後得到 $f(-x) = -f(x)$。 - 給學生 3 分鐘時間練習使用 $f(-x) = -f(x)$ 檢驗 $f(x) = ax^3$ 是一個對稱中心在原點的點對稱圖形。教師隨機抽選學生上台分享她的做法。 $a=0$ 時，圖形會變成一條水平線 $y=0$，就不是一個三次函數了，所以我們會規定 a 不能等於 0。 - 之前上課的時候有提到，高中會針對係數去做更多的討論，因此接下來我們需要花時間來討論一下，不同情況下的 a 會對圖形造成什麼樣的影響。 - 讓學生有一分鐘的時間可以討論 a 的正負、a 變大、變小圖形如何會改變。 - 教師總結三次項係數 a 對於圖型特徵會如何影響。		及 a 變大、變小對圖形的影響。	
$f(x) = ax^3 + px$ 的圖形	- 在最一開始上課複習的時候有提到，一次函數 $f(x) = px$ 是一個對稱於原點的點對稱圖形，若是把這兩種點對稱圖形加在一起，那 $f(x) = ax^3 + px$ 還會是對稱於原點的點對稱圖形嗎？ - 學習單上的(1)~(3)給學生 3 分鐘時間自行完成，與前面操作步驟大同小異。 - 學習單上的(4)、(5)題，教師示範 $a>0$ 且 $p>0$ 的情況，之後交給學生自行討論觀察圖形之後，完成學習單。 - 使用 Geogebra 判斷 $f(x) = ax^3 + px$ 是否為對稱於原點的點對稱圖形。 - 使用 Geogebra 觀察 $f(x) = ax^3 + px$，縮小圖形來看，當 $a>0$ 時，最右方會	15 分鐘	- 與鄰桌同學一起討論完成學習單 - 練習操作 Geogebra - 觀察 Geogebra 上的圖形，了解一次項係數對三次函數的影響。 - 學生回答教師問題。	搭配學習單第三頁

	上升到無限大；當 $a < 0$ 時，最右方會下降到負無限大。 • 使用 Geogebra 觀察 $f(x) = ax^3 + px$，放大圖形來看，當 $p > 0$ 時，圖形在原點附近往右上走；當 $p < 0$ 時，圖形在原點附近往右下走。 • 若是從代數的角度來觀察一次項係數 p 對於三次函數 $f(x) = ax^3 + px$ 的影響，則可以發現在很接近 0 也就是圓點的時候，三次項係數 a 對於 y 值的影響明顯小於一次項係數 p。例： $f(x) = -1000x^3 + x$，當 $x = 0.01$ 時， • $f(x) = -0.001 + 0.01 = 0.009$ 仍為正數，因此可以發現三次項係數 a 的負數相對於一次項係數 p 的正數影響較小。 1. 總結一次項係數 p 也會影響到圖形的特徵，跟三次項係數 a 一樣。可以回家思考看看，若是在三次函數加上 x^2 項及常數項時，圖形還會不會對稱於原點，以及係數會決定特徵還是位置。			
--	--	--	--	--

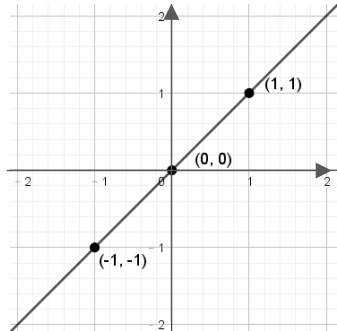
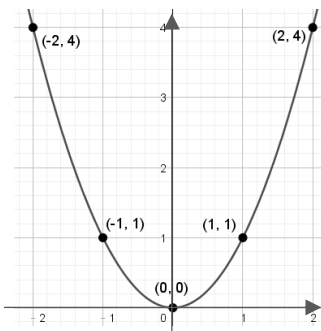
肆、教學評量

單元教學目標	評量方式	備註
能辨別多項式的圖形特徵，並能用其當作模型而解決典型問題。	學生撰寫學校的自編講義，診斷自己的學習成效。	

附件

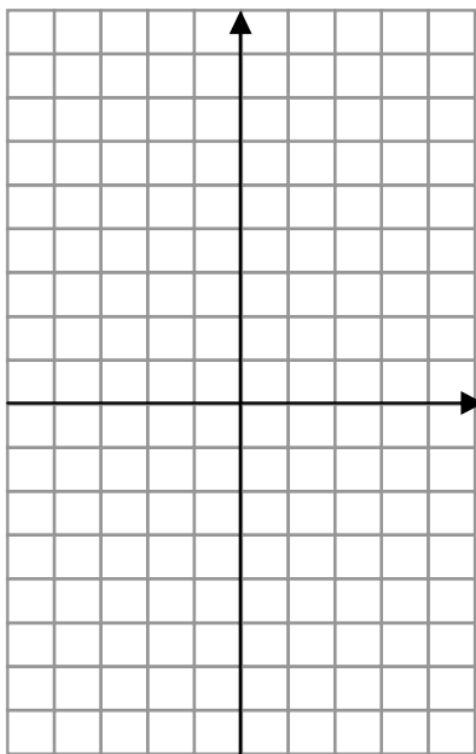
3-3.1 三次函數的圖形

0. 複習

	點對稱圖形	線對稱圖形
圖形檢驗	能找到「一點」，以此點為旋轉中心旋轉 180° 後，與原圖形重疊。稱此一點為對稱中心。	能找到「一直線」，以此直線為摺痕對折後，圖形重疊。稱此一直線為對稱軸。
代數檢驗	圖形上任一點 (a, b) 關於「一點」的對稱點也在圖形上。	圖形上任一點 (a, b) 關於「一直線」的對稱點也在圖形上。
函數	一次函數	二次函數
單項函數	$y = x$	$y = x^2$
圖形		

1. 單項三次函數 $f(x) = x^3$

➤ 畫畫看：利用下方的方格畫出 $f(x) = x^3$ 的圖形



➤ 請問單項三次函數 $f(x) = x^3$ 是否為對稱圖形？請寫下判斷方法。

2. $f(x) = ax^3 (a \neq 0)$ 的圖形



(1) 試試看：掃描右方 QRcode，畫出 $f(x) = 2x^3$ 的圖形。

請問 $f(x) = 2x^3$ 是否為對稱圖形？_____ (是/否)

(2) 拉動係數 a 的滑桿，判斷 $f(x) = ax^3$ 是否為對稱圖形？_____ (是/否)

簡述一下你是如何檢驗的？

(3) 試著使用特殊代數式判斷 $f(x) = ax^3$ 是否為對稱中心在原點的點對稱圖形。

(4) 觀察一下：將數值滑桿 a 移至 1, -1, 2, -2 觀察看看圖形的變化。

I. 當 $a = 1$ 時， $f(x) = x^3$ 圖形由左至右是_____ (向上/向下)

當 $a = 2$ 時， $f(x) = 2x^3$ 圖形由左至右是_____ (向上/向下)

比較 $a = 1$ 跟 $a = 2$ 的圖形，誰的爬升速度比較快？_____ ($a = 1$ / $a = 2$)

II. 當 $a = -1$ 時， $f(x) = -x^3$ 圖形由左至右是_____ (向上/向下)

當 $a = -2$ 時， $f(x) = -2x^3$ 圖形由左至右是_____ (向上/向下)

比較 $a = -1$ 跟 $a = -2$ 的圖形，誰下降速度比較快？_____ ($a = -1$ / $a = -2$)

(5) 結論：

I. 當 $a > 0$ 時， $f(x) = ax^3$ 圖形由左至右是_____ (向上/向下)

II. 當 $a < 0$ 時， $f(x) = ax^3$ 圖形由左至右是_____ (向上/向下)

III. 當 $|a|$ 的值越大時， $f(x) = ax^3$ 圖形的爬升或下降速度越_____ (快/慢)

IV. 係數 a 決定 $f(x) = ax^3$ 圖形的_____ (特徵/位置)

3. $f(x) = ax^3 + px$ 的圖形

(1) 試試看：Geogebra 的活動三，判斷 $f(x) = x^3 + x$ 是否為對稱圖形？_____（是/否）

(2) 拉動係數 a, p 的滑桿，判斷 $f(x) = ax^3 + px$ 是否為對稱圖形？_____（是/否）

(3) 試著使用特殊代數式判斷 $f(x) = ax^3 + px$ 是否為對稱中心在原點的點對稱圖形。

(4) 將 $f(x) = ax^3 + px$ 的圖形縮小之後，整個圖形的樣貌為何？

(5) 將 $f(x) = ax^3 + px$ 的圖形放大之後，原點附近的圖形樣貌為何？

a 值	$a > 0$		$a < 0$	
p 值	$p > 0$	$p < 0$	$p > 0$	$p < 0$
圖形				
(4)	最右方上升到無限大 最左方下降到負無限大			
(5)	原點附近往右上走			

(6) 結論

I. $f(x) = ax^3 + px$ 圖形必定通過_____。

II. $f(x) = ax^3 + px$ 圖形的對稱中心為_____。

III. 當 $a > 0$ 時，函數圖形最右方會上升到_____，最左方會下降到_____；

當 $a < 0$ 時則相反。

IV. 函數圖形在原點附近時，當 $p > 0$ 時往_____走；當 $p < 0$ 時往_____走。

V. 係數 a, p 決定 $f(x) = ax^3 + px$ 圖形的_____（特徵/位置）