

壹、設計理念(教材特色與精神)

在 108 課綱中，三角測量為「不必設置獨立的教學單元」，因此在眾多版本中，都以餘弦定理的應用問題引入三角測量，然而在三角測量中，有部分學生因不會算而無法理解三角測量的應用，亦有一部分學生因不會利用長方體作為解題輔助工具，而無法理解三角測量的應用，因此也發現南一版是以長方體作為三角函數的引入。經過比較，本課程將以南一版的教學脈絡為主並融入實作的過程，為學生分解三角測量的步驟，進而透過學習單佈題設計，了解不同錯誤類型的學生，此外，希望透過課程學生可以於日後解題時，回想實作的過程，進而分辨已知與所求，透過適當的工具輔助解題，在課堂最後也讓學生反思三角測量與實際間的誤差。

貳、教學分析

一、教材分析：

課本版本 課程概念	南一	龍騰	泰宇	翰林
課本安排	第二冊 4-3 三角比的性質	第二冊 Ch12 三角比的性質	第二冊 1-3 正弦定理與 餘弦定理	第二冊 1-3 面積公式與正 餘弦定理
引入主題	先說明何謂水平線、鉛直線、視線、仰角與俯角。	餘弦定理習題後，以實際例子(平面)作為三角測量的引入，才進而演練立體的三角測量。	餘弦定理的第一個例題即為三角測量。進入立體三角測量前，先說明何謂仰角與俯角。	餘弦定理習題後，以實際例子(平面)作為三角測量的引入，才進而演練立體的三角測量。
例題安排	1. 長方體的截面圖形之其中一角角度。 2. 利用長方體的模型，計算 2 點距離，並求平面上 1 點與空間中 1 點的仰角。(課本利用計算機計算仰角角度，有在 4-1 稍微提到 arc 三角函數的概念)	1. 兩點距離受限無法測量時，利用第 3 點及餘弦定理求兩點距離。 2. 引入仰角，不同位置觀測同一物的仰角，進而求物高。	1. 兩點距離受限無法測量時，利用第 3 點及餘弦定理求兩點距離。 2. 知不同位置觀測同一物的仰角，進而求物高。	1. 兩點距離受限無法測量時，利用第 3 點及餘弦定理求兩點距離。 2. 引入仰角，不同位置觀測同一物的仰角，進而求物高。

練習題	1. 求平面上 1 點與空間中 1 點的仰角。 2. 利用長方體的模型，計算 2 點距離，並求平面上 1 點與空間中 1 點的仰角。	1. 兩點距離受限無法測量時，利用第 3 點及餘弦定理求兩點距離。 2. 引入俯角，利用知物高、一點仰角及另一點俯角，求 2 點距離。		1. 餘弦定理的應用。 2. 引入仰角，不同位置觀測同一物的仰角，進而求物高。
可延伸的主題	1. 可利用計算機估算仰角角度近似值。	1. 反思生活中無法直接測量的長度是如何得出，如：玉山高度 3952 公尺。	1. 反思生活中無法直接測量的長度是如何得出，如：玉山高度 3952 公尺。	1. 反思生活中無法直接測量的長度是如何得出，如：玉山高度 3952 公尺。

表一：翰林、龍騰、泰宇、南一四版本三角測量教學內容比較

二、學生分析：

學生已了解並可應用三角比的性質，如：正弦定理、餘弦定理等，而三角測量不僅統合學生於此單元的學習，亦銜接國中的長方體經驗，觀察後利用長方體的截面上示範三角測量，也延展國中的空間概念，並可延伸至錐體。在學習程度上，班級的學生程度皆為普通程度，有些學生可能不擅於空間感，因此透過實作幫助學生累積繪製立體圖的經驗及練習三角比的性質。

三、教學方法分析：

本課程將三角測量的解題過程分步驟，以學生小組(每組約 4~5 人)討論與實作為主，教師講述引導為輔，配合實作、學習單(繪圖、紀錄)及手機中的應用程式(計算機、水平儀)，讓學生對三角測量更有感。此外，原課程設計希望帶學生於校內測量一個有一定高度的物體，如籃球框、大樓的字樣等，但考量授課時間及學生的自律能力，改寫成可於教室內進行的實作活動。

這堂課主要會用學生實作進行，教師從旁輔助，讓學生明白三角測量的過程與解題的方法。下方將探討不同版本引入方式優缺點：

(一) 以三角測量解題所需工具作為引入

由上表可知，此法只有南一版使用，先說明清楚仰角/俯角，並利用其中一種錯誤類型，也就是學生不會利用長方體輔助解題，作為三角測量的引入，由於連結學生既有基模，可讓學生在解題時，能明白第一步該做

什麼，但缺點是學生可能無法連結此處引入長方體與三角函數之關聯，造成學習上有些困難。

(二) 以餘弦定理的應用作為引入

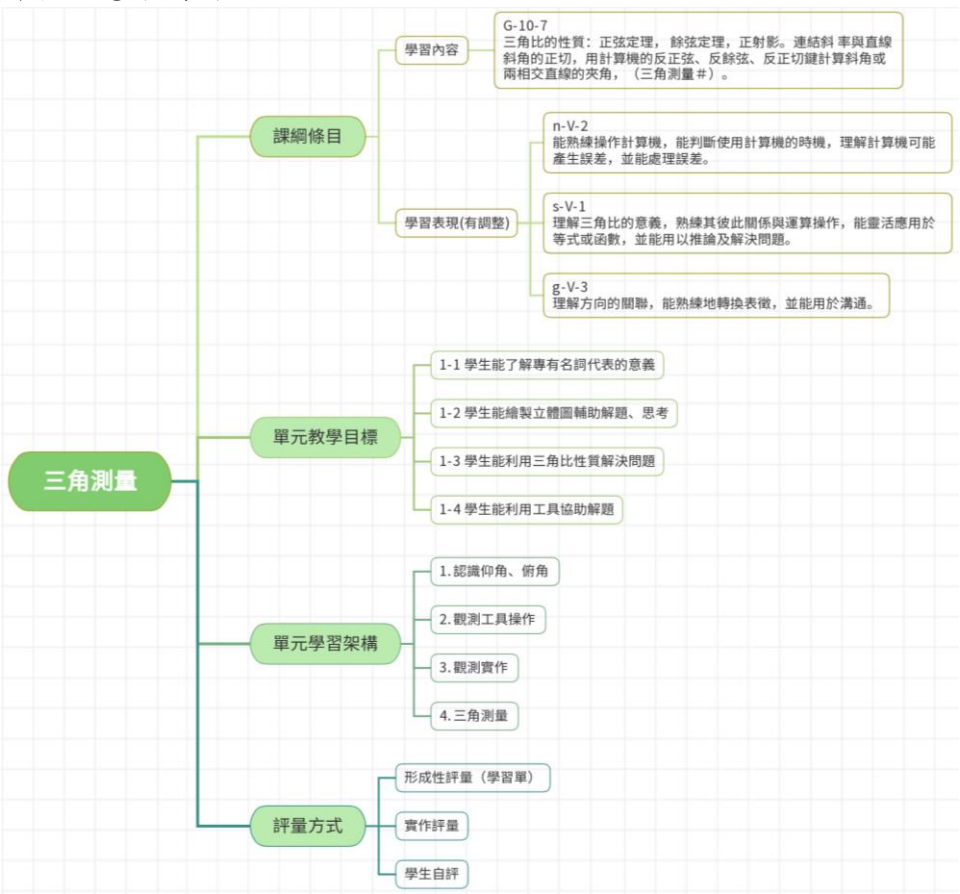
由上表可知，此法為多數版本引入三角函數的方法，推測原因無他，因為三角測量最常用來解題的工具即為餘弦定理，因此課本這樣的安排，讓學生很清楚解題時需要利用什麼工具，但學生往往會算，卻不會將題目的文字敘述轉換成圖形輔助自己解題，進而無法解題。此外，仰角/俯角的概念學生多少聽過，因此許多版本融入在例題中。

(三) 以實作作為引入

此法並未於任何版本中出現，推測實作課程不易寫入課本，但從其他領域的實作當中發現，對於動態型學習者幫助甚大，不過教學時間有限，因此許多教師不敢輕易嘗試此法。

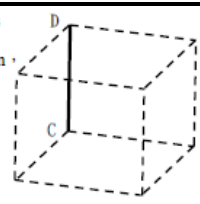
我曾參與過三角測量實作課程，我認為在實作後，對於三角測量的例題更有解題概念，但當時參與的過程中，教師並未逐步分解步驟學得相當可惜，因此想嘗試用逐步分解的實作方式作為教學的新嘗試。綜上所述，本課程將以三角測量解題所需工具為主，實作為輔，並以差異化的學習單設計進行本課程。

四、課程概念架構圖



參、教學活動設計

單元名稱	三角比的性質	適用年級	高一		
課程名稱	三角測量	教學時間	50 分鐘		
教材版本	以南一版為主，輔以龍騰版、翰林版與相關單元講義習題				
教學準備	熟悉課程內容及實作的各步驟，事先準備學習單及於課前向體育組借皮尺，課程進行時，隨時注意學生正確使用工具、巡堂時隨時注意各組進度並適時提出引導與協助及時間管控，並於課堂結束前做小節的總結、回收學習單、指派作業。				
能力指標/學習表現	分年細目/學習內容		單元教學目標		
n-V-2 能熟練操作計算機，能判斷使用計算機的時機，理解計算機可能產生誤差，並能處理誤差。 s-V-1 理解三角比的意義，熟練其彼此關係與運算操作，能靈活應用於等式或函數，並能用以推論及解決問題。 g-V-3 理解方向的關聯，能熟練地轉換表徵，並能用於溝通。	G-10-7 三角比的性質：正弦定理，餘弦定理，正射影。連結斜率與直線斜角的正切，用計算機的反正弦、反餘弦、反正切鍵計算斜角或兩相交直線的夾角，（三角測量Ⅱ）。		1-1 學生能了解專有名詞代表的意義 1-2 學生能繪製立體圖輔助解題、思考 1-3 學生能利用三角比性質解決問題 1-4 學生能利用工具協助解題		
單元教學目標	教學內容		時間	評量方式	備註
1-1 學生能了解專有名詞代表的意義	學習單已於日前發放，學生自行攜帶至課堂 【引入】說明仰角與俯角 [仰角與俯角] 1. 舉個例子說明什麼是仰？(如：看星星) A: _____。 2. 舉個例子說明什麼是俯？(如：低頭滑手機) A: _____。 3. 請畫出仰角與俯角的示意圖，並標示出水平線、仰角、俯角。 仰角： _____ 俯角： _____ 舉例 師：同學們有沒有抬頭看過星星/月亮？ 生：有(點頭)		6	口頭評量、形成性評量（學習單）	

	8. 自塔 $\overline{CD}$ 正東方一點 A，測得塔頂之仰角為 45°，在 A 點正南方之一點 B 測得塔頂 D 之仰角為 30°，若 $\overline{AB} = 20\text{ m}$，試求塔高 $\overline{CD}$？ Sol): 1" 於長方體上標示題目給予的已知資訊 (A、B、角度、長度)  9. 地面上 A、B 兩點相距 $20\sqrt{2}\text{ m}$，今測得一屋頂 C 之仰角分別為 30°、45°，且由 C 測得 A、B 兩點的視角(即 $\angle ACB$)為 135°，求屋高？ 【總結&反思】 1. 回顧實作的過程、反思 2. 課程補充：山上的三角點(視時間補充，附於學習單) 3. 指定作業 4. 回收學習單	2		
--	---	---	--	--

肆、教學評量

單元教學目標	評量方式	備註
1-1 學生能了解專有名詞代表的意義	口頭評量、形成性評量(學習單)	雖然口頭評量只有評量到部分學生，因此再以學習單作為所有學生的學習評量。
1-2 學生能繪製立體圖輔助解題、思考	形成性評量(學習單)	
1-3 學生能利用三角比性質解決問題	形成性評量(學習單)	
1-4 學生能利用工具協助解題	實作評量、形成性評量(學習單)	

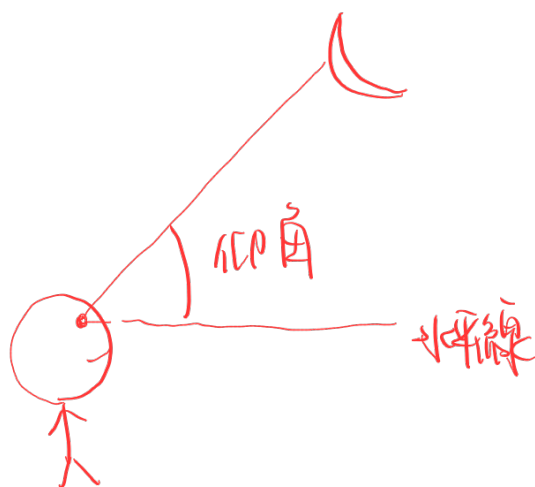
三角測量實作

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____ 組別：_____

[仰角與俯角]

1. 舉個例子說明什麼是仰？(如：看星星) A: 考試抬頭看時鐘。
2. 舉個例子說明什麼是俯？(如：低頭滑手機) A: 在101看下面走路的人。
3. 請畫出仰角與俯角的示意圖，並標示出水平線、仰角、俯角。

仰角：



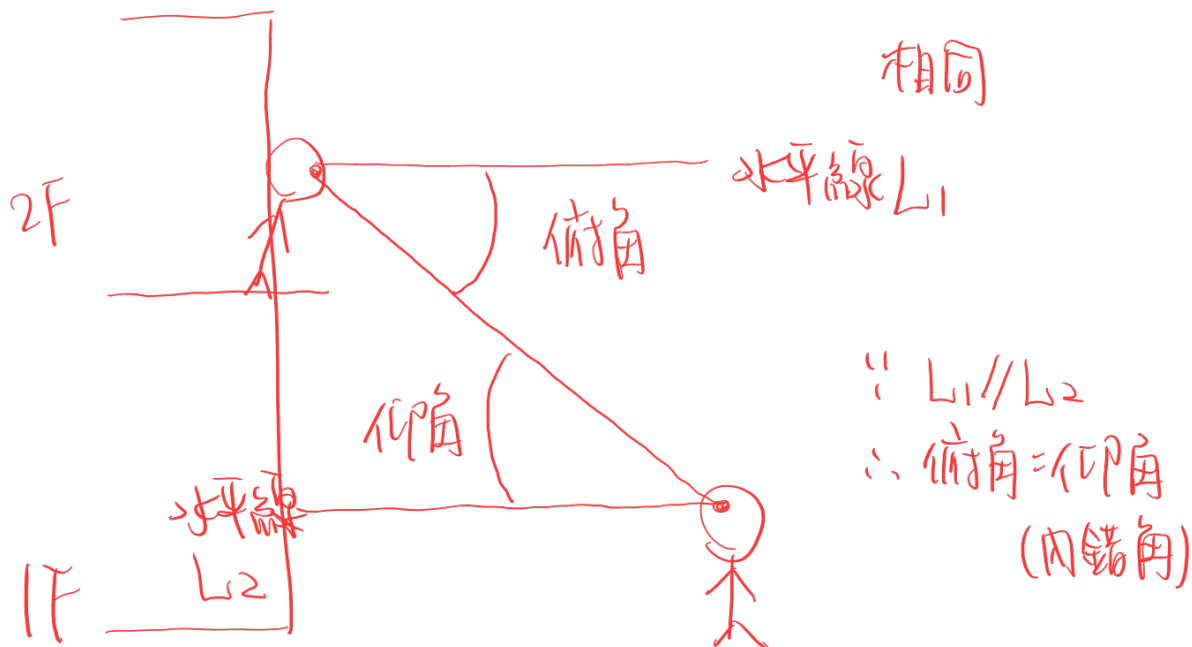
俯角：



- *4. 如果你在2樓走廊往1樓中庭看，不小心和1樓中庭的同學對視，你的俯角會跟1樓中庭的同學的仰角相同嗎？

(請說明原因，可以畫圖表示)

Sol):



[實作]

5. 今天想要觀測 A: 小明 和 B: 小美 的距離，已知時鐘 C 離地高 170 cm，A 同學觀測時鐘的仰角為 23° ，B 同學觀測時鐘的仰角為 37° ，且由時鐘 C 測得 A 與 B 的視角(即 $\angle ACB$)為 45° ，求 $\overline{AB}$ ？
6. 將上述觀測的資訊、位置，繪製並標示於長方體上。

Sol): 1° 於長方體上標示題目給予的已知資訊

(A、B、C、角度、長度)

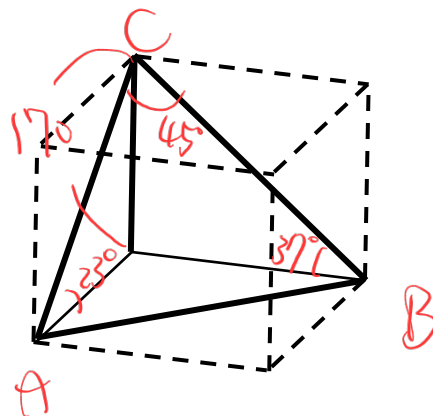
2° 由三角函數，還可以知道哪些長度？

(請配合計算機)

$$\sin 23^\circ = \frac{170}{\overline{AC}}$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = \frac{170}{\sin 23^\circ} \approx 435$$

$$\overline{BC} = \frac{170}{\sin 37^\circ} \approx 282$$



3° 由餘弦定理知

$$\sqrt{435^2 + 282^2 - 2 \cdot 435 \cdot 282 \cdot \cos 45^\circ}$$

$$\approx \sqrt{95268.4223}$$

$$\approx 308.7$$

[目標物的立體圖]

7. 如右圖，甲、乙兩人觀察同一棟高樓，甲在此樓的正南方 10 公尺處，觀察樓頂的仰角為 60° ；乙在此樓的正東方，觀察樓頂的仰角為 30° ，試問：

(1) 甲、乙兩人的距離是多少公尺？

(2) 若由甲、乙兩人的中點觀察樓頂的仰角為 θ ，求 $\tan \theta$ 。

Sol): (1)

1° 於長方體上標示題目給予的已知資訊(樓高、甲、乙、角度、長度)

2° 由特殊三角形，還可以知道哪些長度

$$\triangle ACD \text{ 中, } 30^\circ-60^\circ-90^\circ \\ 1:\sqrt{3}:2 = 10:\overline{CD}:\overline{AC}$$

$$\text{樓高} = \overline{CD} = 10\sqrt{3}$$

$$\triangle BCD \text{ 中, } 30^\circ-60^\circ-90^\circ \\ 1:\sqrt{3}:2 = 10\sqrt{3}:\overline{BD}:\overline{BC}$$

$$\text{乙距離大樓} \underline{30} \text{ 公尺}$$

$$\triangle ABD \text{ 中, } \overline{AB} = \sqrt{10^2 + 30^2} = 10\sqrt{10}$$

$$\therefore \text{甲乙距離} \underline{10\sqrt{10}} \text{ 公尺}$$

(2)

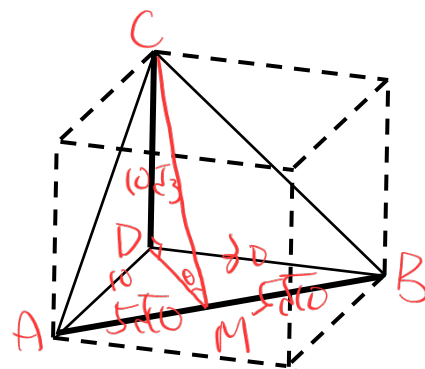
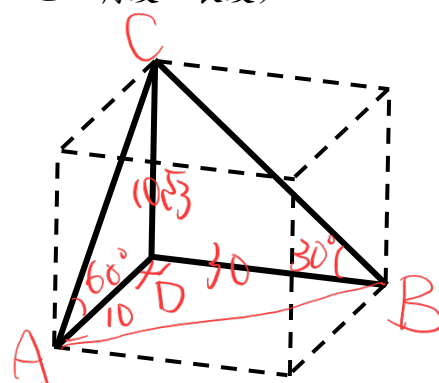
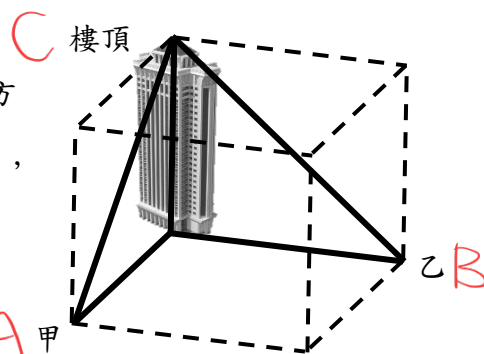
1° 於長方體上標示題目給予的已知資訊，令 M 為 $\overline{AB}$ 中點

2° 連長方形的對角線，可知 $\overline{DM} = \overline{AM} = \overline{BM}$

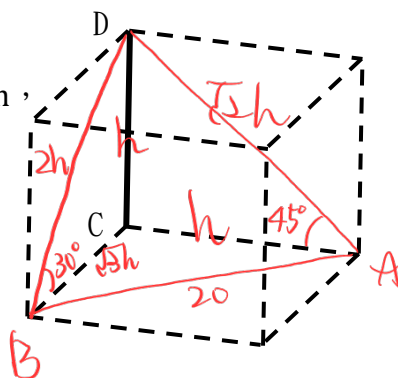
$$= \frac{1}{2} \overline{AB} \\ = 5\sqrt{10}$$

$$\tan \theta = \frac{\overline{CD}}{\overline{DM}} = \frac{10\sqrt{3}}{5\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{30}}{5}\right) \approx 48^\circ$$



8. 自塔 $\overline{CD}$ 正東方一點 A，測得塔頂之仰角為 45° ，在 A 點正南方之一點 B 測得塔頂 D 之仰角為 30° ，若 $\overline{AB} = 20$ m，試求塔高 $\overline{CD}$ ？



Sol): 1° 於長方體上標示題目給予的已知資訊

(A、B、角度、長度)

2° 設 $\overline{AC} = h$

$$\overline{CD} = h$$

$$\overline{BC} = \sqrt{3}h$$

3° 在 $\triangle ABC$ 中

$$\sqrt{h^2 + 3h^2} = 20$$

$$\Rightarrow 4h^2 = 400$$

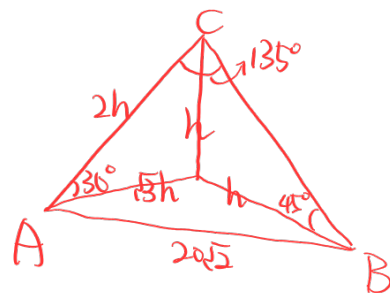
$$h = 10$$

9. 地面上 A、B 兩點相距 $20\sqrt{2}$ m，今測得一屋頂 C 之仰角分別為 30° 、 45° ，且由 C 測得 A、B 兩點的視角(即 $\angle ACB$)為 135° ，求屋高？

Sol):

$$2h^2 + 4h^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2}h^2 \cdot \cos 135^\circ = (20\sqrt{2})^2$$

$$= 800$$



$$\Rightarrow 6h^2 + 4h^2 = 800$$

$$\Rightarrow h^2 = 80$$

$$\Rightarrow h = 4\sqrt{5}$$

[總結]

一、實作

1. 估算出來 $\overline{AB}$ 距離跟實際測量的距離是否相同？若不同，你覺得為何會有這樣的現象？

Sol): 差一點點, 因為一個是用丈量, 一個是用理論估算

2. 呈上題，如果測量會有誤差，你認為怎樣的測量會比較準呢？為什麼？

(任何想法都可以寫下來，亦可以發明特別的測量工具)

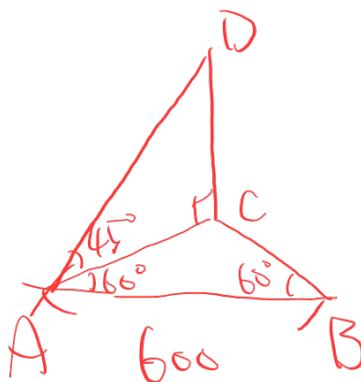
Sol): 我認為測量無論是理論或實際測量都會有誤差, 所以沒有比較準的測量

二、回家練習

3. 某人隔河測一山高，在 A 點觀測山時，山的方位為東偏北 60° ，山頂的仰角為 45° ，某人自 A 點向東行 600 m 到達 B 點，山的方位變成在西偏北 60° ，則山有多高？

Sol):

$$\begin{aligned}\triangle ABC &\rightarrow \text{正}\triangle \\ \overline{AB} &= \overline{BC} = \overline{CA} = 600 \\ \overline{CD} &= \overline{CA} = 600\end{aligned}$$



[課程補充：三角點]

一、什麼是三角點？

台灣的三角點為在地面設置方形石製標石作為永久標誌。
三角點為早期繪製地圖時，用來當作三角測量的基點，為方便觀測，一般設置於視野寬廣處作為觀測點，如：較突出的山頭，以利點與點間互相觀測，因此三角點常見於山的最高點。



山的高度不易測量 → 在視野寬廣處進行三角測量估算高度

二、三角點種類

臺灣的三角點依測量範圍的大到小可分為一等、二等、三等、四等，一等三角點平均邊長為 45 公里，二等則是 8 公里，三等 4 公里，四等平均 2 公里，以山頂展望來說，一等三角點會最遼闊，接著是二等、三等，四等則最差。（例：玉山主峰、雪山主峰皆為一等三角點，大劍山、羊頭山為三等三角點。）



臺灣一等三角點分布圖

參考資料

維基百科 <https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/%E4%B8%89%E8%A7%92%E9%BB%9E>

三角點是什麼？登山客不可不知的那顆神秘石頭 <https://chenwinter.com/triangulation-points/>

臺灣一等三角點分布圖 <https://mnya.tw/k3/images/1-2.jpg>

三角測量實作

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____ 組別：_____

[仰角與俯角]

1. 舉個例子說明什麼是仰？(如：看星星) A:_____。
2. 舉個例子說明什麼是俯？(如：低頭滑手機) A:_____。
3. 請畫出仰角與俯角的示意圖，並標示出水平線、仰角、俯角。

仰角：

俯角：

*4. 如果你在 2 樓走廊往 1 樓中庭看，不小心和 1 樓中庭的同學對視，你的俯角會跟 1 樓中庭的同學的仰角相同嗎？

(請說明原因，可以畫圖表示)

Sol):

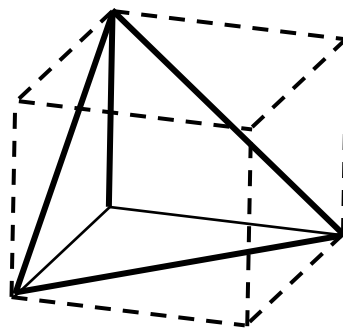
[實作]

5. 今天想要觀測 A：_____和 B：_____的距離，已知時鐘 C 離地
高 170 cm，A 同學觀測時鐘的仰角為_____，B 同學觀測時鐘的仰角
為_____，且由時鐘 C 測得 A 與 B 的視角(即 $\angle ACB$)為_____，求 $\overline{AB}$ ？
6. 將上述觀測的資訊、位置，繪製並標示於長方體上。

Sol): 1° 於長方體上標示題目給予的已知資訊

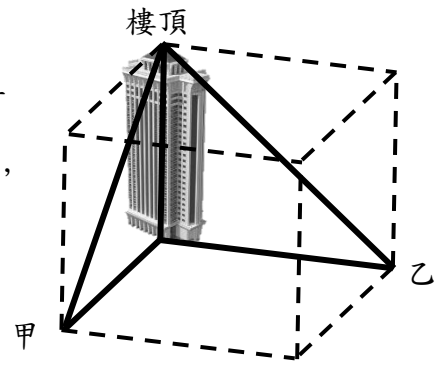
(A、B、C、角度、長度)

2°



[目標物的立體圖]

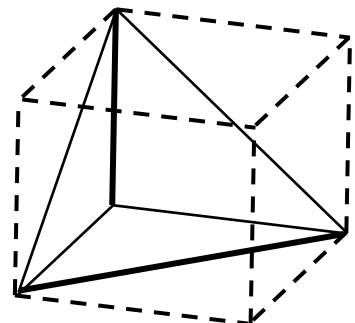
7. 如右圖，甲、乙兩人觀察同一棟高樓，甲在此樓的正南方 10 公尺處，觀察樓頂的仰角為 60° ；乙在此樓的正東方，觀察樓頂的仰角為 30° ，試問：



- (1) 甲、乙兩人的距離是多少公尺？
(2) 若由甲、乙兩人的中點觀察樓頂的仰角為 θ ，求 $\tan \theta$ 。

Sol): (1)

(2)



8. 自塔 $\overline{CD}$ 正東方一點 A，測得塔頂之仰角為 45° ，在 A 點正南方之一點 B 測得塔頂 D 之仰角為 30° ，若 $\overline{AB} = 20$ m，試求塔高 $\overline{CD}$ ？

Sol):

9. 地面上 A、B 兩點相距 $20\sqrt{2}$ m，今測得一屋頂 C 之仰角分別為 30° 、 45° ，且由 C 測得 A、B 兩點的視角(即 $\angle ACB$)為 135° ，求屋高？

Sol):

[總結]

一、實作

1. 估算出來 $\overline{AB}$ 距離跟實際測量的距離是否相同？若不同，你覺得為何會有這樣的現象？

Sol):

2. 呈上題，如果測量會有誤差，你認為怎樣的測量會比較準呢？為什麼？

(任何想法都可以寫下來，亦可以發明特別的測量工具)

Sol):

二、回家練習

3. 某人隔河測一山高，在 A 點觀測山時，山的方位為東偏北 60° ，山頂的仰角為 45° ，某人自 A 點向東行 600 m 到達 B 點，山的方位變成在西偏北 60° ，則山有多高？

Sol):

[課程補充：三角點]

一、什麼是三角點？

台灣的三角點為在地面設置方形石製標石作為永久標誌。
三角點為早期繪製地圖時，用來當作三角測量的基點，為方便觀測，一般設置於視野寬廣處作為觀測點，如：較突出的山頭，以利點與點間互相觀測，因此三角點常見於山的最高點。



山的高度不易測量 → 在視野寬廣處進行三角測量估算高度

二、三角點種類

臺灣的三角點依測量範圍的大到小可分為一等、二等、三等、四等，一等三角點平均邊長為 45 公里，二等則是 8 公里，三等 4 公里，四等平均 2 公里，以山頂展望來說，一等三角點會最遼闊，接著是二等、三等，四等則最差。（例：玉山主峰、雪山主峰皆為一等三角點，大劍山、羊頭山為三等三角點。）



臺灣一等三角點分布圖

參考資料

維基百科 <https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/%E4%B8%89%E8%A7%92%E9%BB%9E>

三角點是什麼？登山客不可不知的那顆神秘石頭 <https://chenwinter.com/triangulation-points/>

臺灣一等三角點分布圖 <https://mnya.tw/k3/images/1-2.jpg>