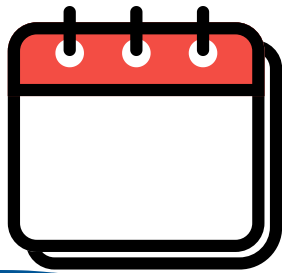


# 115學年度第1學期

## 數學教學專業知能增能工作坊



### 115/9/29(二)

時間：15:40-17:20

## 數學臆測教學

講師：南投縣政府教育處 學務管理科

黃雅蘭主任



本校數學樓2樓C205教室

指導單位：教育部

主辦單位：國立臺中教育大學數學學習領域教學中心

協辦單位：國立臺中教育大學數學教育學系

國立臺中教育大學師資培育暨就業輔導處



活動公告

## 數學臆測教學與實作

📅 時間:115年9月29日    👤 分享者:黃雅蘭課程督學

**「拿出生活當中有圓形的物品，描在紙上。」**  
**這是探索的起點。**

---

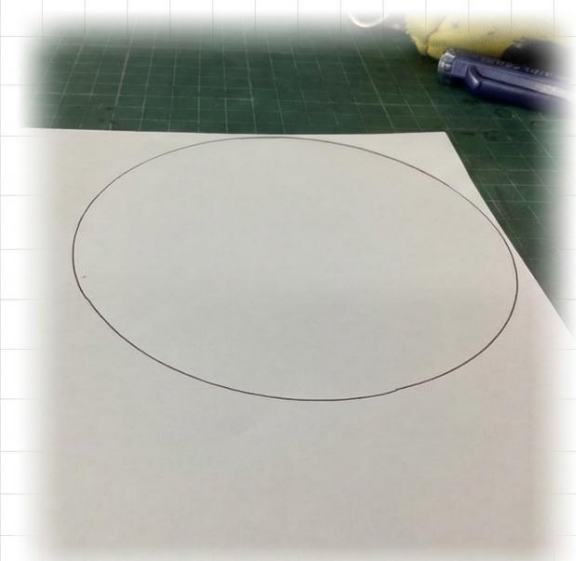
### 任務

小學六年級數學課堂。

---

### 起手式

不使用圓規，僅憑生活物件描繪。  
沒有既定的公式，只有純粹的幾何輪廓。





## 沒有圓心，怎麼找直徑？

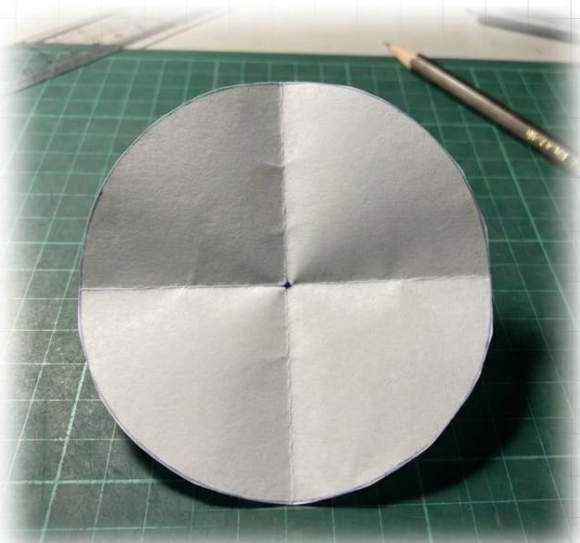
當公式缺席，  
學生必須疑，  
學生必須自己「做數學」。

思考盲區：

拋棄直尺的刻度與課本的定理。

當圓心未被標示，傳統的「半徑乘以二」公式毫無用武之地。

Gemini Notebook



「用對摺的方式找出圓心，  
由邊緣通過圓心找到直徑。」

——這就是最真實的猜想  
與驗證。

學生的發現：

透過物理操作對摺，讓圖形隱藏的  
對稱屬性自然浮現。解題不再是背誦  
步驟，而是主動建構知識。

Gemini Notebook

數學素養，來自於

# 臆測



**探索**

尋找圖形與數字背後的結構與規律美。



**檢驗**

幾分證據說幾分話，  
建立理性辯護的習慣。

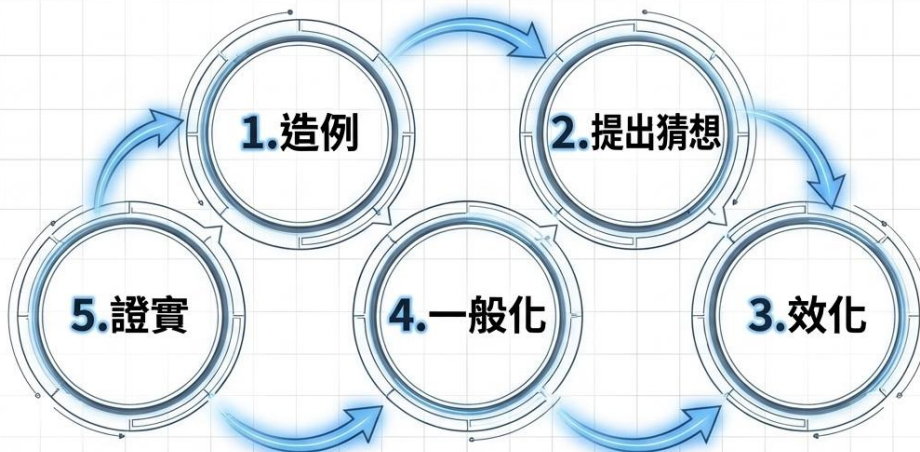


**修正**

理解是首要目標，  
學生是知識的發現者，  
而非單純的背誦者。

Gemini Notebook

**數學臆測教學模式：五個階段，將學生的直覺轉化為嚴謹的數學知識。**



Gemini Notebook

## 數學的擬經驗主義觀點

Lakatos (1976) 的哲學突破：數學知識並非恆常不變的絕對真理



### 傳統課堂迷思

- 數學被視為純粹理性的絕對產物
- 學生僅背誦既定定理與解題套路
- 懼怕錯誤，缺乏真實的探究體驗



### 擬經驗的本質

- 數學具有「可錯性」與動態演進性
- 在猜測與反駁中修正前提條件
- 學生從知識接收者躍升為創造者

## Pólya 的雙重思維引擎

臆測是在特殊化（下降）與一般化（上升）間往返穿梭的認知歷程



**特殊化 (Specializing)**  
將問題簡化與具體化  
先從簡單數字、特定  
圖形著手試驗，尋找  
具體局部的規則。



**一般化 (Generalizing)**  
將規律擴充為普適通則  
綜合多重案例特徵，  
抽離出共通結構，形  
成恆真廣泛的命題。



**類比與遞迴 (Analogizing)**  
跨情境結構對照  
在同構或相仿數學情  
境中檢驗推論，強化  
結構洞察力。

## 數學臆測思維遞迴歷程

陳英娥與林福來（1998）經典思維模式：動態演進的四階段閉環



## 數學臆測 vs. 數學論證

釐清關鍵定位：臆測是動態探究歷程，論證是集體協商成果



### 數學臆測教學 (過程)

- 教學取向：教師建構的完整探究活動
- 認知觸發：由觀察造例引動猜想發想
- 課堂機制：提供論證產生的絕佳養分



### 數學論證品質 (成果)

- 能力展現：集體對話與合理辯護的能力
- 實證標準：幾分證據說幾分話的嚴謹性
- 終極產出：形成客觀且令人信服的命題

## 臆測課堂全面激發 4C 關鍵能力

對應 21 世紀關鍵素養：從被動記憶邁向高階思維



### 創新 (Creativity)

自主造例並洞察嶄新數學關係與公式



### 批判 (Critical)

尋找潛在反例並主動檢驗他人論據缺陷



### 協作 (Collaboration)

組內匯整資料並協商出小組代表性共識



### 溝通 (Communication)

精準運用數學語言向全班進行論辯說服

## 單元二 · 實務步驟

## 臆測教學五大階段

循序漸進的課堂學習歷程：從個人有感到全班嚴謹命題

## 五大階段推進全景圖

遵循「個人活動 → 小組協商 → 全班論辯」的社會建構節奏

### 第一階段

造例階段 (Constructing Cases)：自主創造多個實例並彙整規律工作單

### 第二階段

猜想階段 (Formulating Conjectures)：從關係與規律中形成個人及組內猜想

### 第三階段

效化階段 (Validating Conjectures)：跨組尋求更多案例支持或提出反例反駁

### 第四階段

一般化階段 (Generalizing)：加入限制條件或全稱量詞，使之恆真

### 第五階段

證實階段 (Proving / Justifying)：運用演繹推理與已知公理建立嚴謹說服

資料來源：王秀芳(2019)。比率與百分率。載於林碧珍(主編)，數學臆測任務設計與實踐：整數、分數與小數篇(頁259-272)。師大書苑。

## 第一階段：造例 (Constructing)

建立數據與表象基石：拒絕枯燥灌輸，讓學童親手產出感官素材

### 學生的任務行為

- 依照任務指引產出 2~3 個具體數學特例
- 將數據有條理地謄錄於彙整工作單
- 感受手作與計算背後的數據真實性

### 教師的引導關鍵

- 扮演「分派者」與「支持引導者」
- 行間巡視，確認操作無技術性算術錯誤
- 此時不急於協調或下結論，保留發想留白

## 第二階段：提出猜想 (Conjecturing)

由現象到本質的跳躍：培育「幾分證據說幾分話」的民主素養

### 個人獨立思考

- 觀察表格行與列的數值關聯性
- 在個人猜想單寫下直覺發現或假說
- 保障低成就學生擁有專屬思考空間

### 組內協商凝聚

- 夥伴相互核對是否有「憑有據」
- 淘汰無法合理解釋的臆測
- 產出小組代表海報，準備全班發布

## 第三階段：效化 (Validating)

跨組火花碰撞：打破同溫層，利用相異案例檢定猜想真實性

### 跨組異例代入

各組持有相異數值，彼此交叉測試猜想是否普遍奏效。

### 理性反例反駁

只需一個確鑿反例，便能推翻草率的一般化結論。

### 評鑑品質分級

協調篩選出表述最清晰、最符徵驗的代表性全班猜想。

## 第四階段：一般化 (Generalizing)

走向嚴密恆真：透過前提限縮或全稱量詞，使命題放諸四海皆準



### 策略 A：限縮邊界條件

- 當發現反例時，不可直接將整份研究廢棄
- 釐清前提：例如「限正整數」或「限凸多邊形」
- 將非恆真命題轉化為「條件恆真」之定理



### 策略 B：引入全稱量詞

- 注入數學嚴密性語言：「任意、所有、必定」
- 從「這幾個圖形會」躍升至「任何扇形皆滿足」
- 培育學童大膽推論、有膽識的現代科學公民素養

## 第五階段：證實 (Proving)

終極數學說服：揚棄單純經驗累積，走向形式化的邏輯演繹證明

### 演繹推理本質

- 歸納造例再多，永遠無法替代演繹證明
- 運用已知的數學定義、幾何公理或代數運算
- 構築無懈可擊的邏輯鏈，說服他人完全確信

### 包含關係疏理

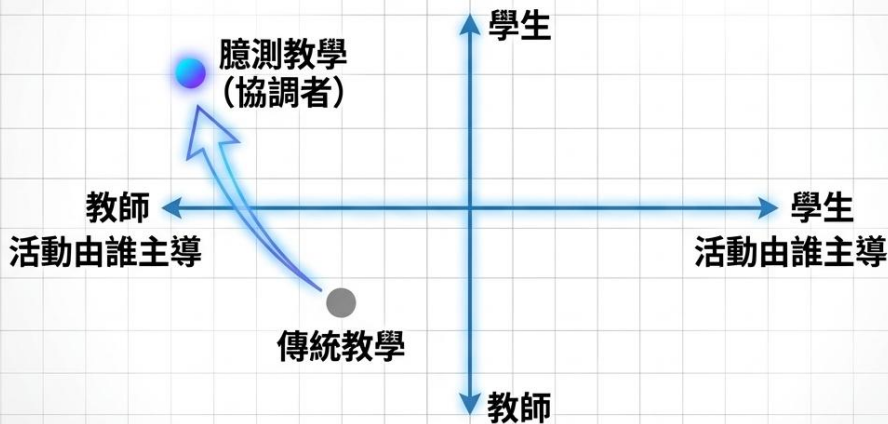
- 協調者在此引導「範圍包含關係」
- 提問「哪一個方式歸納類似的結果」
- 將多重猜想簡併證實，極大化課室論證效能

## 教師角色四象限與協調者地位

**完美的課堂，是教師策略與學生認知的精準咬合。**

|     | 學生認知發展 | 教師協調行為          |
|-----|--------|-----------------|
| 造例  | 尋找規律   | 鼓勵與支持           |
| 猜想  | 提出假設   | 辨認與比較           |
| 效化  | 批判與辯護  | 深度介入 (辨認/比較/整合) |
| 一般化 | 全稱推論   | 引導收斂            |
| 證實  | 演繹推理   | 梳理包含關係          |

## 把「思考的主導權」還給學生



最艱鉅的任務，是教師必須退居幕後，讓學生的想法成為課堂的主角。

Gemini Notebook

### 教師提問角色四象限模型

#### 第二象限：協調者 (Moderator)

活動：教師主控 | 想法：學生主導

掌握全班節奏，但所有主張與論證皆源自學生思考。

#### 第一象限：挑戰者/教練 (Coach)

活動：學生主控 | 想法：學生主導

小組自主互動，教師從旁拋出挑戰題深化學生探究。

#### 第三象限：分派者 (Dispenser)

活動：教師主控 | 想法：教師主控

單向佈達指令、分派任務工具或講述標準演算規則。

#### 第四象限：參與者 (Participant)

活動：學生主控 | 想法：教師介入

融入學童討論圈，適時提供線索微調學生理解方向。

## ◆協調者的「低比例、高關鍵」特質

林碧珍 (2020) 實徵課室觀察數據：極具技術門檻的靈魂角色

課堂整體佔比

< 10%

次數不到一成，卻主宰論證  
成敗

### ✔為什麼協調者最難扮演？

教師必須克制「直接告訴答案」的衝動，在不評定對錯的前提下組織衝突想法。

### 💡為什麼造例階段幾乎沒有協調者？

協調者需要「學生的具體猜想」作為素材，造例階段著重操作引導與陪伴支持。

## 教師是最敏銳的「協調者」

主導活動流程，但提供舞台讓學生的想法互相互碰撞。

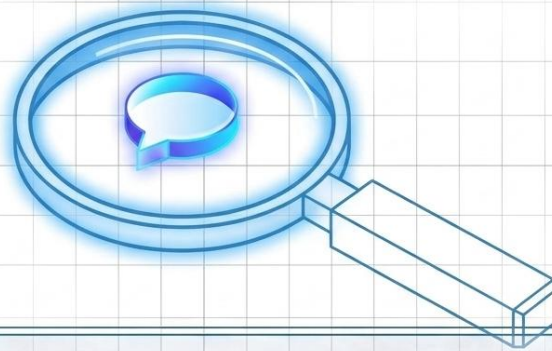
協調者

辨認

比較

整合

## 協調行為一：辨認 (Identifying)



敏銳捕捉學生的微小猜想，理解他人的想法，賦予立場，要求學生為自己的猜想舉例辯護。

Gemini Notebook

### 行為一：辨認 (Identification)

促使學童理解他人思維，明確表達立場並援引例子辯護

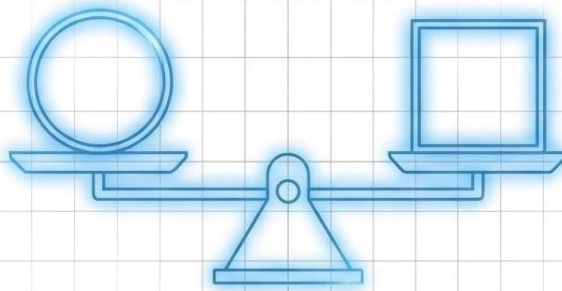
#### 教師經典提問策略

- 「誰看得懂第二組海報寫的意思？」
- 「贊成他們說法的舉手，為什麼同意？」
- 「有沒有人發現這句話哪裡有漏洞？」

#### 激發的認知歷程

- 迫使學童跳脫自我中心，專注傾聽他人發言
- 進行真偽初判，並搜尋個人工作單以援例辯護
- 奠定課堂理性交流與公共論辯的對話基調

## 協調行為二：比較 (Comparing)



引導學生看見不同猜想間的「異中求同」與「同中求異」，拉高認知層次。

Gemini Notebook

### 行為二：比較 (Comparison)

高階認知活動：在多個分散想法間抽取共通的深層數學規律

#### 個案課室實錄 (質因數分解)

師：「你覺得質因數跟這邊有什麼關係？」

生：「都有這個...都是質數！」

成效：引導學童聚焦欄與欄之間的共通結構

#### 認知轉化價值

- 從表面的數字偶然，提升至結構必然
- 發現兩數與最大公因數分解式的深層連繫
- 為小組猜想催生出具備數學價值的規律

## 協調行為三：整合 (Integrating)



在眾多猜想中，評鑑品質，梳理限制條件，引導全班篩選出最精準的數學語言，形成全班共識。

Gemini Notebook

### 🔷行為三：整合 (Integration)

推選最佳代表與梳理邏輯體系：效化與證實階段的核心支柱

#### 效化階段的整合 (13.1%)

- 歸類同性質海報，請全班評鑑篩選
- 「這三張猜想，哪一張描述最精準代表？」
- 融合優點，打造語言嚴謹的全班共同猜想

#### 證實階段的整合 (8.6%)

- 聚焦於命題的前提條件與定義範圍
- 「哪一個命題範圍大？哪一個範圍被包在裡面？」
- 釐清從屬關係後一併論證，大幅提升課室效率

## 🔑實作一任務佈題：農夫爺爺的長方形菜園

### 🎯 探究核心情境與提問

「農夫爺爺有 24 公尺長的籬笆，圍出長方形，怎樣圍面積才最大？」

「周長固定時，面積一定是固定的嗎？長和寬的差距與面積有什麼關聯？」

### ⚠ 學生常見迷思與約定

- 迷思 1：「周長都是 24，面積應該都一樣吧？」
- 迷思 2：「長方形越長，看起來越大，面積越大！」
- 操作約定：長與寬先以「整數公尺」為造例單位

## 📊任務一階段一：特殊化造例與填表

四年級學童任務：固定「長 + 寬 = 12 公尺」，畫出圖形並記錄數據

### 📋彙整工作單數據（長 + 寬 = 12）

圖 1 (長11, 寬1)  
差 10 → 面積 11

圖 2 (長10, 寬2)  
差 8 → 面積 20

圖 3 (長8, 寬4)  
差 4 → 面積 32

圖 4 (長7, 寬5)  
差 2 → 面積 35

### 👩教師提問引導（觀察規律）：

「請大家觀察最後一欄的面積數值，隨著長與寬的差距越來越小，面積發生了什麼變化？」

## 任務一階段二：觀察規律與大膽猜想

小組對話激盪：長寬差距縮小引動的面積爆發與幾何爭議

### 第一組大膽猜想（結構型）

- 「長和寬相差越少，圖形越胖，面積就越大！」
- 「當長=6、寬=6時，面積達到最大值 36 平方公尺！」
- **猜想草案**：越接近正方形，長方形面積就越大！

### 第二組爭議猜想（概念衝突）

- 「可是題目是長方形花圃，長=6、寬=6 是正方形！」
- 「正方形算長方形嗎？如果不能算，最大只能是 35！」
- **課堂張力**：正方形是否屬於長方形的概念邊界討論

## 任務一階段三：組間效化與反例考驗

協調者介入引導辨認：「這個規律在其他周長成立嗎？小數邊長呢？」

### 測試一：周長 20 公尺

長寬和為 10： $9 \times 1 = 9$ 、 $8 \times 2 = 16$ 、 $5 \times 5 = 25$ ，差距越小面積越大完全成立！

### 測試二：小數反例考驗

長 6.5、寬 5.5，面積高達 35.75！打破第二組的 35 限制，逼近 36。

### 概念整合：幾何包容

正方形具備四個直角，是特殊的長方形，全班凝聚共識！

## ∞任務一階段四與五：一般化與幾何證實

國小幾何圖形拼貼：不靠複雜代數，展現無字證明的演繹說服力

### ▼一般化：全稱恆真命題

- 納入正方形作為廣義長方形
- 全稱命題：在任意固定周長的長方形中，兩邊長差距越小，面積就越大！
- 當長與寬完全相等（正方形）時，面積達到最大值！

### 🧩證實：幾何圖形拼貼推理

- 設正方形邊長為6，面積為36
- 長方形長寬為 $(6+d)$ 與 $(6-d)$ ，拼入正方形
- 面積為 $36 - d^2$ ；因為 $d^2 \geq 0$ ，差 $d$ 越小扣掉越少， $d=0$ 面積最大！

## 🏡國小幾何思維深化

身歷其境體驗：看見學童在數據觀察與幾何包容中的思維躍遷



### 數據造例有感

親自算面積與填表，打破「周長固定則面積必定固定」的先驗直覺惰性。



### 概念包容釐清

透過「正方形算不算長方形」的辯論，深刻建構幾何圖形的屬性包容定義。



### 演繹說服素養

用 $36 - d^2$ 的幾何拼塊向全班解釋，體會四年級也能做到嚴謹演繹！

# 臆測任務

## 1-個人臆測

- 觀察
- 理解題意
- 解題思考

## 2-小組猜想

- 小組討論
- 發現關係
- 提出異同臆測結果

## 3-驗證猜想

- 小組分享解法
- 同組異解
- 異組同解

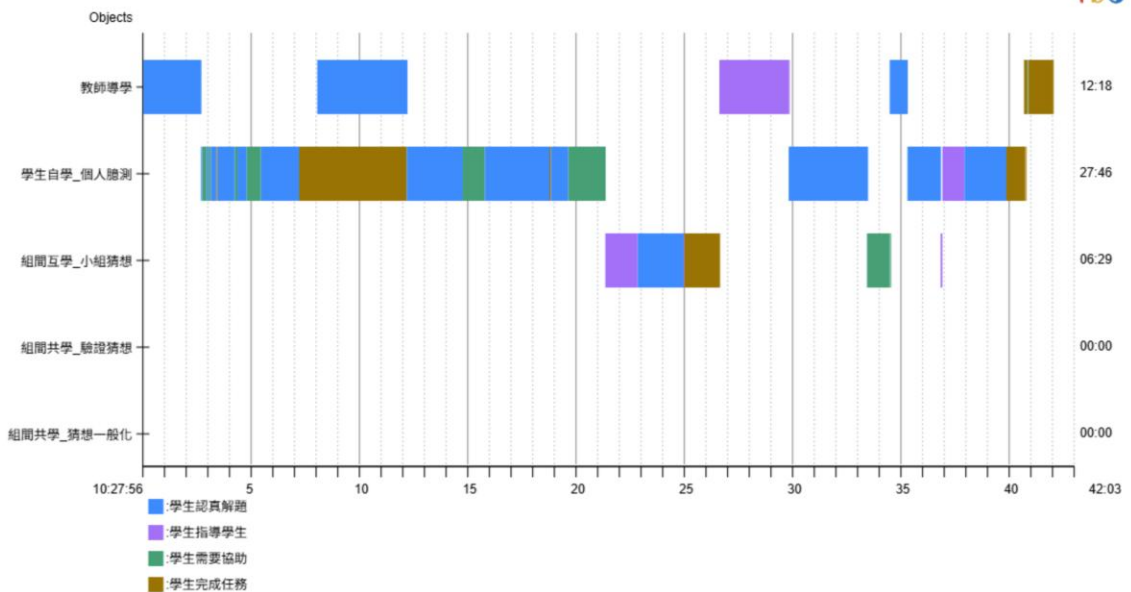
## 4-猜想一般化

- 小組舉例
- 驗證解法
- 找出一般化

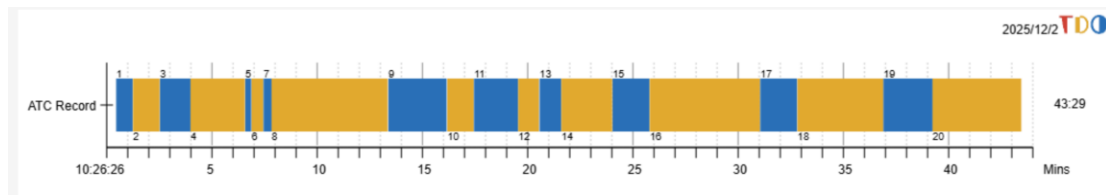
資料來源:王秀芳(2019)。比率與百分率。載於林碧珍(主編)，數學臆測任務設計與實踐:整數、分數與小數篇(頁259-272)。師大書苑。

2025/12/2\_timeline

TDO



# ATC事件呈現結果



| 序數 | 開始記錄時間   | 送出時間     | 記錄文字                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----|----------|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | 10:26:53 | 10:27:40 | 第一件是請大家打開平板電腦，昨天建立的數學筆記，打開後把平板轉向我，現在剩下第二組。 10:27:37                                                                                                                                                                                                                                                 |
| 2  | 10:27:41 | 10:28:57 | 大家打開上周作題，請讀一次藍色題目，請把那一行字念出來，學生讀題。 10:28:56                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 3  | 10:28:58 | 10:30:25 | 你們觀察這一題有哪些圖形？S:長方形、半圓形，請寫出你的策略是什麼？在平板上作答，請自行調整。你也可以寫在附件單，再拍照上傳。 10:30:23                                                                                                                                                                                                                            |
| 4  | 10:30:25 | 10:33:00 | 教師個別指導17、5，不是算出答案就好，可以寫出解題策略觀察到什麼、看到那些？ 10:32:07 教師指導8號、18號，提問20是什麼？ 10:33:00                                                                                                                                                                                                                       |
| 5  | 10:33:01 | 10:33:18 | 剩下一分鐘，請未繳交同學回答。 10:33:17                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 6  | 10:33:19 | 10:33:52 | 這題再因材網有12位同學答對， 10:33:50                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 7  | 10:33:53 | 10:34:16 | 教師行間巡視學生作答情形， 10:34:14                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 8  | 10:34:16 | 10:39:47 | 剛剛有被提示的同學，請留意你哪裡做錯？哪裡需要思考？13位同學完成作業， 10:35:07 請勿繳交同學起立，一人說一個，首先根據這個題目，你第一個想到是什麼？14把旁邊兩個半圓組合成一個圓。7長方形，T:長方形面積如何算？再想想看？7:平行四邊形，T:20公尺是什麼？18是圓的直徑，T:引導學生說出圓面積公式。S:半徑*半徑*3.14。T:提問學生回答有什麼問題？S:沒有寫出解題方法與答。 10:38:12 常珍只在7、8中間，所以7+8，15兩個半圓變成一個圓，T:這是一種方法，有沒人在圖片劃記？你可以把這個策略放在題目上面，大家沒問題， 10:39:40 請讀綠色題卡。 |
| 9  | 10:39:49 | 10:42:35 | S:全班讀題。T:以這題來說，這題有幾種圖形？S:2種。T:第一種正方形、正方形有幾條邊？S:4條，我要變成圓周長，所以你要？T:我給你們五分鐘，請問你在算過程中，你發現什麼關係？ 10:42:10 你不能只寫計算過程，還要寫規律與關係，教師行間巡視學生作答。 10:42:35                                                                                                                                                         |

|    |          |          |                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|----|----------|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 11 | 10:45:55 | 10:45:59 | 間，這是關係你盡量寫，不要只寫老師說的。 10:45:59                                                                                                                                                                                                                                      |
| 12 | 10:45:59 | 10:46:58 | 三位學生完成任務 10:46:32，                                                                                                                                                                                                                                                 |
| 13 | 10:47:00 | 10:48:02 | 教師題問學生一件事:S17你為何要把這個算在一起? 10:47:32 教師提問引導學生發現正方形與圓形關係。 10:47:59                                                                                                                                                                                                    |
| 14 | 10:48:02 | 10:50:27 | 6位完成任務，T:一定有人未完成，請有成功寫出來同學說給沒寫出來的同學聽，不是告訴答案，而是告訴解題策略，我給三分鐘討論。 10:49:13 教師行間巡視各組作答，第三組到第二組 10:49:59 教師提醒在空白處畫圖畫出正方形。 10:50:27                                                                                                                                       |
| 15 | 10:50:28 | 10:52:13 | 各組學生互學 10:50:44 T:只有一邊圍成圓形或全部邊長圍成圓形?T:行間巡視各組作答。 10:51:41 我待會請你講一下。還有10秒鐘趕快做總結。 10:52:11                                                                                                                                                                            |
| 16 | 10:52:14 | 10:57:28 | 另外三組伸出右手指向腳的做清楚同學，最高票請起立。 10:52:50 第二組一開始 $6.28/3.14=2$ ，但是我另一個算式與這個答案一樣，這個算出來會等於他的半徑。不認同的舉手，(學生反映聽不懂)，T:6.28是其中一邊的邊長，S是整根鐵絲圍成圓形。T:一邊6.28，所以四邊是多少?S:25.12,T:這是要算什麼?S:圓的周長。T:14請你回答接下來要做什麼?除以3.14，T問2除以3.14要做什麼?S2:算出圓面積。T:所以你算出的面積是多少?S:50.24.這一題有一半人答錯的。 10:57:28 |
| 17 | 10:57:29 | 10:59:14 | 請看漫畫回答問題 10:57:40 教師:2號就是你了，請看四格漫畫，請劃記重點 10:58:36 有些字不清楚，請看平板。 10:58:55 教師倒數15秒。 10:59:13                                                                                                                                                                          |
| 18 | 10:59:15 | 11:03:20 | 時間到，請號碼最小的起立。我一個一個問，你看到什麼?S3:他說要買兩個四吋....，T:你覺得合不合理?S3:還沒算?T:你再算算看。T走到15:你看到什麼?S15:我不知道，T:你可不可以用畫到? 11:01:19 T到S2:你覺得合不合理?S2:合理。T:如何檢驗?S2:算算看。T到S12:你覺得合不合理?S2:合理。T:如何檢驗?S2:算算看。我給大家三分鐘，未完成者下一堂繼續完成。 11:03:12                                                      |
| 19 | 11:03:20 | 11:05:40 | 還有兩分鐘(教師用計時計)，T:如果你已經算出結果的，你覺得小又該不該接受?感覺很合理。S:不該。 11:04:38 T:該不該接受?把原因寫出來。教師行間巡視。 11:05:22 S:被老師騙了，因為面積不一樣。                                                                                                                                                        |

## 數學臆測教學實踐金鑰總覽



### 嚴謹任務設計

工作單需有利於察覺規律，組間組內設計相異例以供即時效化。



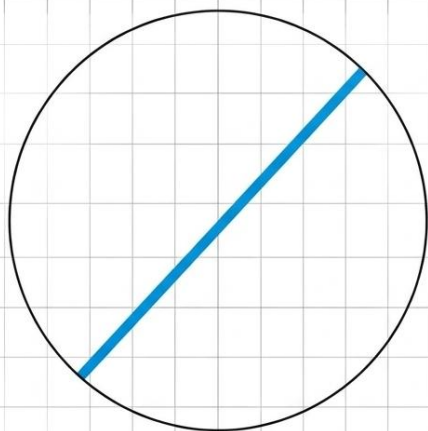
### 協調者提問技術

不評判答案，聚焦於辨認立場、抽取共通關係與整合代表猜想。



### 數位工具鷹架

導入智慧平臺降低記錄負擔，讓學童全心投入高層次推理思考。



**讓每一次解題，都是一場偉大的發現。**

將猜想的權利交還給學生，創造充滿探索與啟發的數學課堂。

# 滿意度調查問卷

請於工作坊結束後，掃描下方 QRCode 填寫滿意度調查問卷，將提交完成的畫面交給工作人員確認，並進行簽退，中心將於一週內發送電子研習證明至報名之信箱。



## NOTES

## NOTES