

壹、 設計理念

以知名藝術家艾薛爾的作品《漩渦》為引入方式，讓學生發現數學和藝術跨領域的結合之美。古希臘數學家畢達哥拉斯曾說：「萬物皆數。」實為亙古不朽的佳言；事實上，在欣賞藝術的過程中，人們所觀察到的對稱、和諧、旋轉及鑲嵌的圖形變化，每一部創作的想法，都與數學的思維及概念息息相關。我希望帶著學生從一個小小的圖形，經過數學的演算和推導，完成一幅和諧而勻稱的幾何圖形；讓學生在學習的過程中，感受到數學方法的設計思維與功用；並在學習歷程完成後，有意願嘗試創作與探究；使學生對數學的觀點可以更加多元與豐富。

貳、 教學分析

一、教材分析

版本/課綱	翰林 108	南一 108	泰宇 108
引入方式	以一張圖片在座標軸上旋轉的示意圖，直接進入教學內容，並推導出 旋轉矩陣 的形式	說明藝術家艾薛爾的作品《漩渦》之作圖方法，藉此將 旋轉 的概念引入教學主題	延續前述漫畫中， 電腦 處理圖形轉換的情境，接著開始介紹如何尋找讓物件旋轉的 二階方陣
教學順序	將旋轉矩陣歸納在四種特殊變換的矩陣之中，其教材安排順序為： 伸縮→鏡射→ 旋轉 →推移	將旋轉矩陣歸納在四種特殊變換的矩陣之中，但各個變換的獨立性更大，講解內容也較多，其教材安排順序為： 伸縮→鏡射→ 旋轉 →推移	將旋轉矩陣歸納在四種特殊變換的矩陣之中，其教材安排順序為： 伸縮、推移→ 旋轉 →鏡射
推導方式	選 取 代 表 點 (1, 0), (0, 1) 推得旋轉矩陣中的各元素	任取座標平面中一點(x, y)，經過旋轉後，利用 極座標 的觀點及 三角函數合角公式 推出矩陣中各位置應擺放的元素	選 取 代 表 點 (1, 0), (0, 1) 推得旋轉矩陣中的各元素
表徵應用	1. 圖形表徵 透過 單位圓 、單位圓上的點及其對應的 角度、位置 ，讓學生理解旋轉後 座標數值 的來由 2. 符號表徵 配合 圖形表徵 ，將二維的 座標 轉換成 向量與矩陣 進行推導過程的操作 3. 文字表徵 介紹旋轉矩陣的詳	1. 圖形表徵 畫出點旋轉的 軌跡 形成圖形，並標示出角度的相關位置，以配合後續文字推導的解釋 2. 文字表徵 配合 圖形表徵 ，將圖形操作化的動作以文字描述 3. 符號表徵 配合 文字表徵 ，將符號套用在文字敘	1. 圖形表徵 透過 單位圓 、單位圓上的點及其對應的 角度 ，加上兩個代表向量張開的區域，讓學生理解旋轉後 座標數值 的來由，以及對整個圖形進行旋轉變換的初步概念 2. 符號表徵 配合 圖形表徵 ，將二維的 座標 轉換成

	細定義，以文字敘述的方式呈現	述中，用以描述數學上的細節(例：旋轉半徑 $r > 0$)與座標數值、合角公式、向量及矩陣的表示	向量與矩陣，用以解釋矩陣的元素 3. 文字表徵 推導過程中連結符號與圖形的解釋性敘述
例題	1. 中心在原點的正六邊形頂點在平面上的座標值推導。給定一點，下一個點的座標即此點旋轉 60° 的結果，再透過旋轉矩陣的觀念求解	1. 給定一點座標數值，求以此點和原點作一正三角形，第三點的座標。除了利用旋轉 60° 的變換矩陣求解外，也需考慮順時針和逆時針兩中方向的旋轉 2. 給定一點座標數值，與原點形成一擺放位置給定的等腰直角三角形，求另一點的座標數值。結合旋轉與伸縮的變換，依此說明變換合成與矩陣相乘的對應關係	1. 將推導的過程和結果設計成題目 2. 給定一點座標數值，求以此點和原點作一正三角形，第三點的座標。除了利用旋轉 60° 的變換矩陣求解外，也需考慮順時針和逆時針兩中方向的旋轉
練習題	基礎題： 1. 延續例題的示範，求出其他頂點(旋轉不同角度)的座標值	基礎題： 1. 中心在原點的正八邊形頂點在平面上的座標值推導。在給定一點後，透過旋轉的觀念求解 2. 延續例題 2. 旋轉加伸縮的運用，考慮不同圖形(矩形)的情況	基礎題： 1. 延續例題 2. 的情境，考慮三角形為等腰三角形的情況
	進階題： 1. 同時考慮多種圖形進行旋轉變換，體驗旋轉矩陣在圖形轉換上的應用	進階題： 1. 結合二次曲線的圖形(圓)，求出旋轉後圖形的方程式 2. 移動旋轉的半徑及中心，求出此情境下的新座標點	進階題： 1. 減少三角形的條件限制，只給定兩點座標及某個角度，以及三角形為等腰直角，需考慮多項可能的圖形，再利用旋轉變換求解
素養結合	創造力的引導： 挑戰題的設計增加教材	藝術美感的培養及跨領域的結合：	科技運用： 引入方式及附錄的說

	的有趣程度，可能引起學生好奇更多圖形變換的方法，以及變換各種圖形的結果	引入方式結合藝術創作，將兩種不同領域的思維融合在一起；也可以藉此培養數學的情意向度，藉由對於和諧、對稱、鑲嵌等欣賞角度，培養藝術結合數學的價值觀與態度	明，都緊扣旋轉矩陣實際在圖形轉換上的應用，其中 程式指令 的介紹，更是符合現代科技融入教育的趨勢
延伸概念	變換的 合成 ： 介紹完所有變換後，考慮多種變換的情形，並引出 矩陣相乘 對圖形變換的意義	線性變換的 面積比 ： 介紹完所有變換後，介紹矩陣的 行列式值 與圖形變換後 面積 的關係	線性變換的 面積大小 ： 介紹完所有變換後，介紹矩陣的 行列式值 與圖形變換後 面積 的關係

二、學生分析

(一)認知層面

經過前面章節的學習，學生了解二維平面座標如何以向量及矩陣的形式表示，並了解線性變換與矩陣之間的連結。在進入旋轉矩陣的單元前，學生已經知道伸縮、推移線性變換的矩陣形式，並能理解如何藉選取標準點 $(1, 0)$ 、 $(0, 1)$ 的方式推得矩陣中元素的數值。此外，學生也能理解極座標在二維平面空間中的表示式，並知道極座標轉換的作法

(二)情意層面

學生能欣賞自然與建築中的數學之美，例如對稱、排列與和諧，並對嶄新的藝術性刺激具有好奇心與熱忱，也不排斥將藝術與數學計算進行跨領域的結合。對於藝術的鑑賞與解析，學生能提出自己的想法與創見，並勇於在課堂中與教師、同儕討論。

三、教學方法分析

(一)直接講述法

向學生直接講述學習內容，配合板書及 Geogebra 檔案之呈現，利用回憶舊經驗、文字及符號表徵、圖形表徵以及動作表徵，促進學生思考並了解本單元之學習內容。

(二)觀察法

透過 Geogebra、圖形表徵之呈現，讓學生觀察圖形之間的變化與數學之間的關聯，並結合課堂提問、互動性回答問題來激發學生思考，也期許透過觀察法的引入，對學生進行形成性評量，以掌握學生的學習狀況和進度，並視情況調整教學策略。

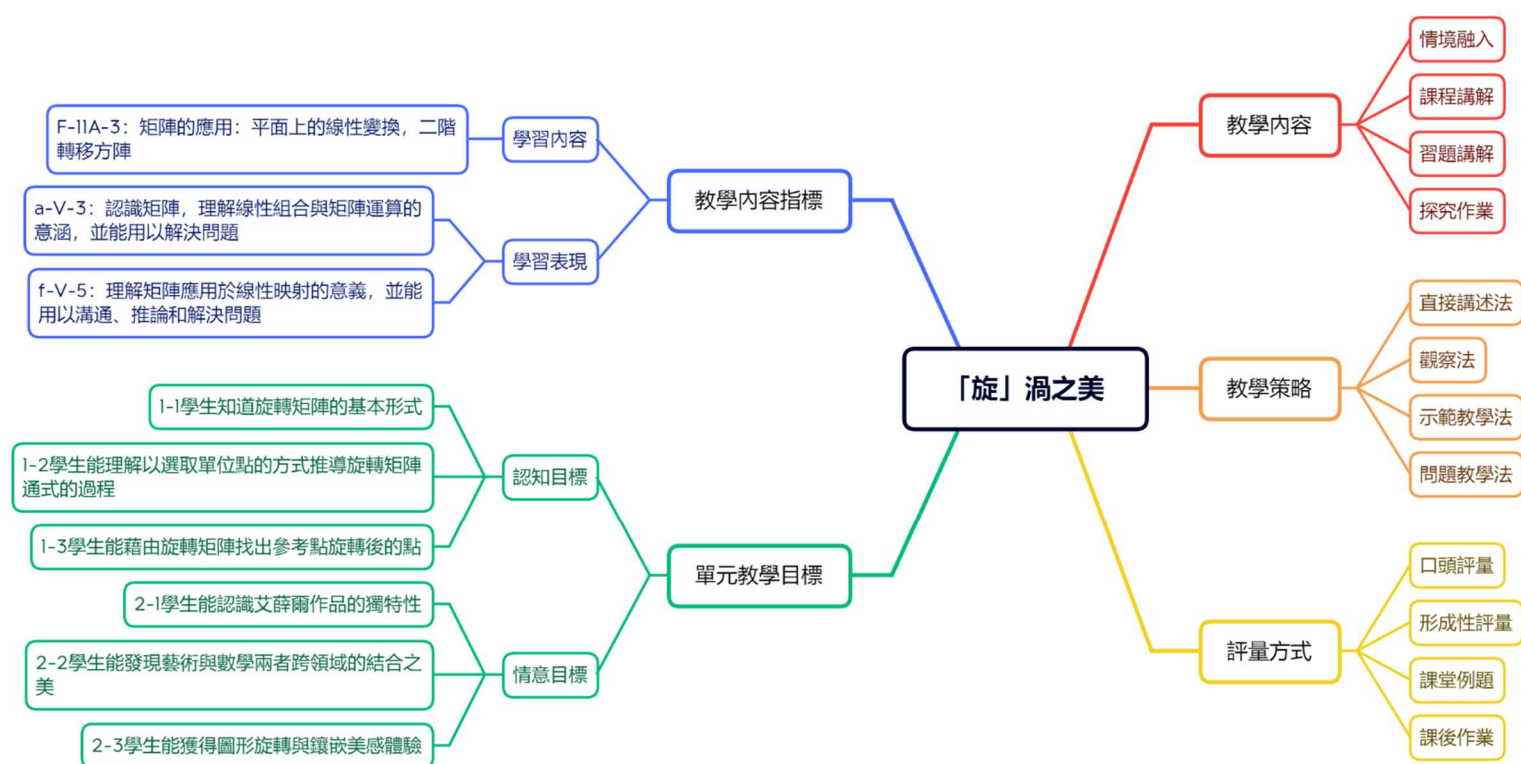
(三) 示範教學法

執行推導矩陣的過程：包含選取參考點的想法、旋轉參考點的位置、角度作為示例，透過一連串的行動、程序、技巧及知識引入，配合板書以及 Geogebra 檔案的圖形呈現，使學生對學習內容的脈絡更加清晰

(四) 問題教學法

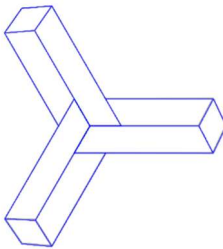
透過完成圖形的情境當作目標，帶學生分析完成圖形前會碰到的問題與思考架構，並增廣學生在學習過程中運用到知識及技能。在學習過程結束後以一個適當的延伸作業當作新問題的開頭，期許學生的學習過程具有連續性、階段性

四、課程概念架構圖



參、教學活動設計

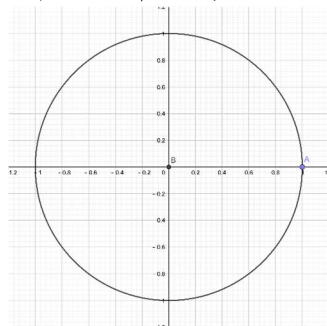
單元名稱	矩陣的應用	適用年級	高中二年級
課程名稱	「旋」渦之美	教學時間	50 分鐘
教材版本	以南一版為主，輔以翰林、泰宇版		
教學準備	艾薛爾作品圖片、Geogebra 檔案		
能力指標/學習表現	分年細目/學習內容	單元教學目標	
a-V-3：認識矩陣，理解線性組合與矩陣	F-11A-3：矩陣的應用：平面上的線性變換，二階轉移方陣。	1. 認知目標 1-1 學生知道旋轉矩陣的基本形式	

2-2 學生能發現藝術與數學兩者跨領域的結合之美	時的第一步，我們會先有一隻魚的圖案，再將它進行旋轉和縮放，鑲嵌在一起後，形成我們所看到的作品 (2)接續(1)的說明，已知有一隻魚的圖形，帶學生思考如何完成整個圖形 說明： 現在我們有一隻魚的圖案，那麼我們接下來要做的事，就是對這隻魚進行旋轉和縮放。先考慮看看旋轉的情境，在這個單元的學習內容中，就會教大家怎麼樣將圖形進行旋轉喔！ 二、製造情境 (一)引入學生學習的目標(圖案)，讓學生先觀察圖案的樣貌 (1)從《漩渦》圖案過渡到較簡單的圖形，將事先準備好的圖形呈現給學生 說明： 同學們，因為艾薛爾《漩渦》的圖形對剛開始學習旋轉圖形的我們來說有點太複雜了，我們不妨先看看上面這個簡單的例子：  (2)藉由提問激發學生思考，並與學生互動 提問： 還記得我們要來討論旋轉圖形的故事嗎？在艾薛爾的作品當中，我們知道完整的一層圖案是由一隻魚來旋轉而成，那麼同學們可以思考看看，以上的圖形會不會也跟圖案中某一個小部分的旋轉有關呢？ (二)說明完整圖形為單一圖形旋轉後的結果，製造學生了解旋轉圖形方法的需求 (1)帶學生發現該圖形由單一圖形旋轉而成 相信有些觀察力比較敏銳的同學已經看出來了，不過沒有看出來的同學也不要灰心，老師這邊呈現出來就會比較清楚囉！！ 請同學們注意上面的圖片：	(2)2 二、10 (一)3 (1)1 (2)2 (二)7 (1)2	口頭評量	中最外面的那隻魚，指給學生看 開啟圖片，並準備好 GGB 檔案 開啟 GGB 檔
---------------------------------	--	---	-------------	---

1-2 學生能理解以選取單位點的方式推導旋轉矩陣通式的過程	有沒有注意到其實這整個圖形，就是由這藍色的一小塊旋轉兩次組成的呢？ (2)配合 GGB 實際操作，讓學生看到旋轉圖形的動態效果 說明： 如果同學們覺得有點抽象的話，不如我們實際來看看「旋轉圖形」是怎麼操作的吧： 同學們有沒有看到藍色的圖形經過旋轉兩次之後，就可以形成完整的圖形了呢？ (3)從學習需求中引入學習內容 說明： 同學們還記得先前章節在學習圖形的伸縮和平移時，會用到線性變換與矩陣的概念嗎？所以接下來我們要開始進入這個單元要學的內容—旋轉矩陣囉！ 三、課程內容 (一)複習線性變換矩陣的求取方法 在前面學習伸縮與平移線性變換的過程中，我們知道在二維平面上，可以選取 $(1,0)$, $(0,1)$ 做為參考點，分析兩者經過線性變換後的點，進而求出線性變換的矩陣。 (二)帶學生找出平面向量上的點$(1,0)$, $(0,1)$ 經過旋轉後的點，並推導出旋轉 θ 角之矩陣的各行 (1)準備並介紹討論旋轉矩陣時會用到的工具 在討論旋轉時，一般來說會將旋轉中心設定在 $(0,0)$，旋轉方向是逆時針。 我們先挑一個最簡單的點：$(1,0)$ 看看吧！	(2)2 (3)3 三、15 (一)3 (二)12 (1)3	口頭評量 口頭評量	操作 GGB 檔案：按下「開始旋轉」按鈕 搭配學習單第 1. 題
--------------------------------------	--	---	-------------------------	--

請問同學們， $(1,0)$ 在坐標軸上以圓點為中心逆時針旋轉，轉出來的軌跡會是甚麼樣子呢？同學們可以看著老師比出的手勢想想看。

相信很多同學們已經觀察出來，如果從 $(1,0)$ 開始，以 $(0,0)$ 為中心逆時針旋轉，那麼旋轉一圈的軌跡將會構成一個完整的單位圓，在這個圓上經過旋轉後的點，都會落在這個單位圓上



(2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 旋轉後的向量

首先我們先來看 $(1,0)$ 旋轉之後，會跑到哪個位置？

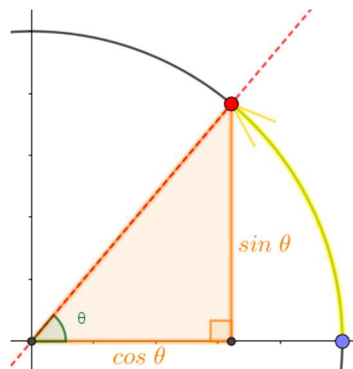
各位同學請看好， $(1,0)$ 在這個位置，接著我們在圓心處取一個 θ 角

從 $(1,0)$ 沿著圓弧往上旋轉 θ 角，會到達這個點，我們來找出它的坐標值：

旋轉後點的 x 坐標值是 $\cos \theta$ ， y 的座標值是 $\sin \theta$

我們可以將 $(1,0)$ 繞旋轉中心 $(0,0)$ 旋轉的過程，看成是從 $(0,0)$ 出發到 $(1,0)$ 的向量在旋轉，所以我們可以寫成向量的形式： $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 經過旋轉之後，會到達

$\begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$



回想之前單元中求矩陣的觀念：

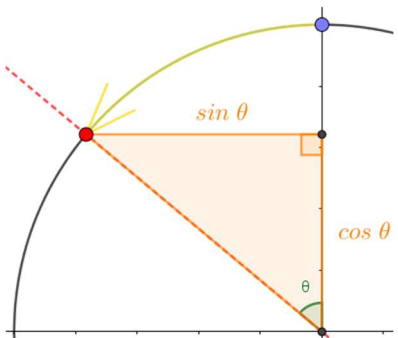
由 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 變換後的新向量是矩陣的第一行，

(2)3

提供學生思考與回答時間

搭配黑板，畫出二維平面標示 $(1,0)$ 的位置
講述旋轉軌跡時搭配手勢

標出 θ 的位置，為 x 軸和某一直線的夾角，該直線以虛線繪出
沿著圓弧用粉筆描粗旋轉的軌跡，畫大選轉後的新點

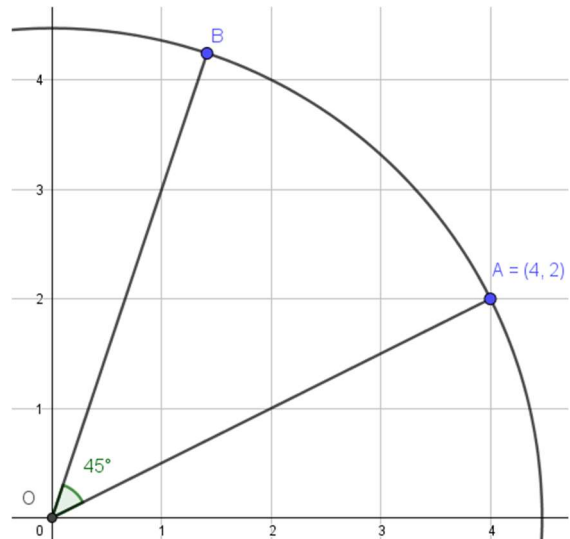
1-1 學生知道旋轉矩陣的基本形式	因此旋轉矩陣的第一行是 $\begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 旋轉後的向量 再來我們看 (0,1) 旋轉之後，會跑到哪個位置？ (0,1) 在這個位置，接著我們一樣取跟前面一樣的 θ 角，注意到我們的旋轉方向是逆時針，所以 θ 的位置要出現在 y 軸的左邊，那麼從 (0,1) 開始，逆時針旋轉之後會落在第二象限， 我們來找出它的坐標值：旋轉後點的 x 坐標值是 $-\sin \theta$，y 的座標值是 $\cos \theta$ 和前面一樣，我們將 (0,1) 繞旋轉中心 (0,0) 旋轉的過程，看成是從 (0,0) 出發到 (0,1) 的向量在旋轉，寫成向量的形式：$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 經過旋轉之後，會到達 $\begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$  由 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 變換後的新向量是矩陣的第二行， 因此旋轉矩陣的第二行是 $\begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$ (4) 統整(2)、(3)的結果，得到旋轉角度為 θ 的旋轉矩陣 同學們，最後我們要來統整一下旋轉的矩陣到底長甚麼樣子；大家注意我們從左邊得到的結果： $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 經過旋轉之後，得到 $\begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$，對到矩陣的第一行； $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 經過旋轉之後，得到 $\begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$，對到矩陣的第二行 所以我們可以知道，旋轉 θ 角的矩陣是 $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$	(3)3 (4)3	標示 (0,1) 的位置 標出 θ 的位置，為 y 軸和某一直線的夾角，該直線以虛線繪出 用粉筆描粗旋轉的軌跡，畫大選轉後的新點 在黑板中間畫中括號表示矩陣，上面留空間讓 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 可以對下來	課堂例題
	四、習題講解 (一)引入例題	四、5 (一)5		

1-3 學生能藉由旋轉矩陣找出參考點旋轉後的點

1-1 學生知道旋轉矩陣的基本形式

同學們，我們既然已經知道了旋轉矩陣的模樣，那麼我們馬上來看一題範例的練習吧：

如圖，已知 A 點坐標為 (4, 2)，B 點為 A 點以原點為旋轉中心，逆時針旋轉 45° 的點，試求 B 點坐標



(1)將此題與旋轉矩陣的概念進行連結

說明：

請同學們想想看，我們剛剛講過旋轉矩陣的長相；那麼一個平面上的坐標，乘上旋轉矩陣之後，就可以得到旋轉之後的點。

(2)實際將對問題與坐標進行數值化，並用數學觀念解決問題

同學們，現在我們已經知道 B 點是由 A 點旋轉而來，然後我們看一下圖形上角度的標示，旋轉角度是 45°。因此將 A 點的坐標乘上 45° 的旋轉矩陣，就可以求出 B 點的坐標了

我們先求 $\theta = 45^\circ$ 的旋轉矩陣，那麼這個旋轉矩陣怎麼求呢？請同學先在學習單空白處寫下你的答案

寫好之後可以和老師對一下答案：

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

接下來要求 B 點怎麼求呢？B 點是對 A 點旋轉 45°，就代表：

(1)1

(2)4

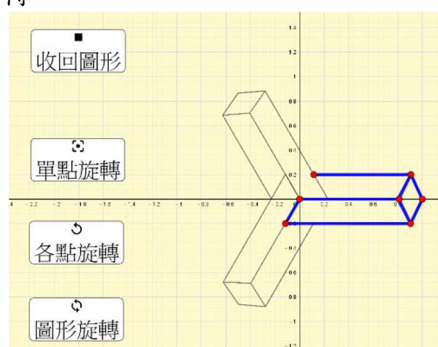
形成性評量

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

所以 B 點的坐標就是 $(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

五、完成圖形

(一)單點旋轉



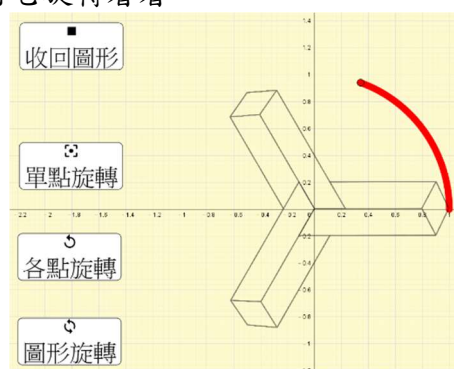
在知道旋轉矩陣的基本形式後，我們看回講解矩陣前想要旋轉的圖形上。同學們注意到我們剛剛講解旋轉矩陣的時候，我們可以透過旋轉矩陣，將一個點的坐標乘上旋轉矩陣後，求出旋轉後的點的坐標。

提問：

那麼我們要怎麼運用這個觀點旋轉圖形呢？

解釋：

我們的想法是，先看圖形上單一的一個點，我們先將它旋轉看看：



同學們可以注意到，如果從單一個點旋轉來看的話，它旋轉之後的位置會跑到旋轉後圖形的點上面

(二)整個圖形旋轉

接著請同學們想想，如果要將整個圖形旋轉，是不是就是將落在圖形上的每一個點，全部一起旋轉之後，就可以得到旋轉之後的圖形呢？我們先挑選圖形上幾個點，看看旋轉後的樣子：

五、12

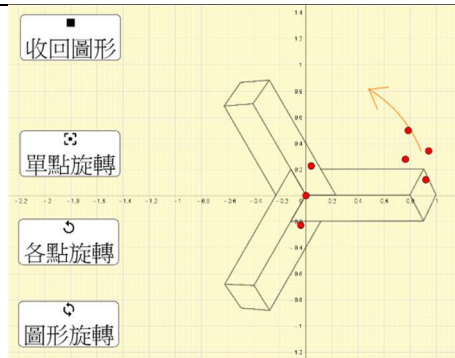
(一)3

開啟 GGB
活動(五)
檔案

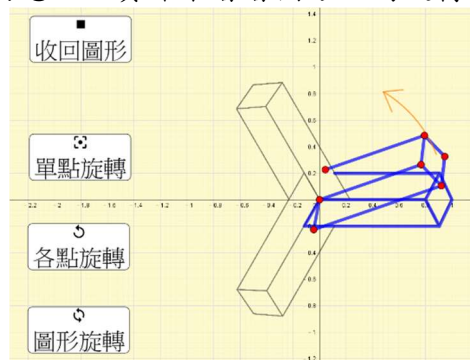
點選「單
點旋轉」
按鈕

(二)4

1-3 學生能藉由旋轉矩陣找出參考點旋轉後的點



現在我們已經看到各個點旋轉之後的位置，那麼我們就可以用「將圖形上每個點都旋轉過去」的想法，實際來看看圖形如何旋轉：



(三) 求出旋轉的角度以及旋轉矩陣，完成圖形

了解完實際如何旋轉圖形之後，接下來我們來看看在這個圖形中，我們實際要旋轉的角度和矩陣式甚麼吧！同學們注意到在這個圖形當中，我們把一整圈的角度分成 3 個等分，所以我們從一開始的圖形旋轉成下一個圖形，我們所要旋轉的角度就是：

$$\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

我們先把要旋轉的第一個角度 θ_1 調整為 120° ，這時同學們注意到我們的旋轉矩陣就是

$$\begin{bmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.5 & -0.87 \\ 0.87 & -0.5 \end{bmatrix}$$

我們實際來旋轉一次看看吧：

點選「各點旋轉」按鈕

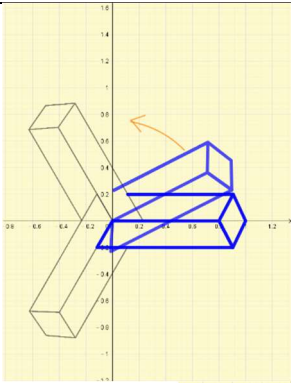
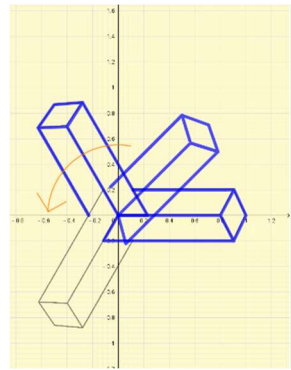
點選「圖形旋轉」按鈕

(三)5

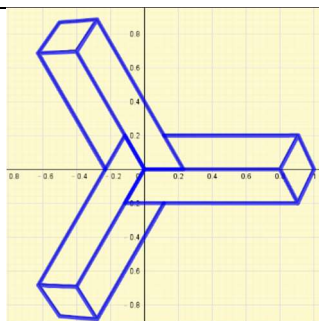
調整 θ_1 滑桿至 120°

點選「旋轉第一次」按鈕

1-1 學生知道旋轉矩陣的基本形式

1-1 學生知道旋轉矩陣的基本形式	 $\theta_1 = 120^\circ$ 旋轉矩陣 = $\begin{bmatrix} \cos(120^\circ) & -\sin(120^\circ) \\ \sin(120^\circ) & \cos(120^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.87 \\ 0.87 & -0.5 \end{bmatrix}$ 旋轉第一次 $\theta_2 = 0^\circ$ 旋轉矩陣 = $\begin{bmatrix} \cos(0^\circ) & -\sin(0^\circ) \\ \sin(0^\circ) & \cos(0^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 旋轉第二次 看來我們已經快完成囉!接下來只要再旋轉一次圖形，我們就可以完成這個圖案了，那麼請同學們思考一下，如果想從第一個圖形旋轉到剩下的那一個圖形，我們的旋轉角度要是幾度呢?請同學們舉手回答 說明：答案應該是 $120^\circ \times 2 = 240^\circ$ 此時旋轉矩陣就是： $\begin{bmatrix} \cos 240^\circ & -\sin 240^\circ \\ \sin 240^\circ & \cos 240^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.5 & 0.87 \\ -0.87 & -0.5 \end{bmatrix}$ 我們再旋轉一次，就可以完成圖形了!  $\theta_1 = 120^\circ$ 旋轉矩陣 = $\begin{bmatrix} \cos(120^\circ) & -\sin(120^\circ) \\ \sin(120^\circ) & \cos(120^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.87 \\ 0.87 & -0.5 \end{bmatrix}$ 旋轉第一次 $\theta_2 = 240^\circ$ 旋轉矩陣 = $\begin{bmatrix} \cos(240^\circ) & -\sin(240^\circ) \\ \sin(240^\circ) & \cos(240^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.87 \\ -0.87 & -0.5 \end{bmatrix}$ 旋轉第二次	口頭評量	調整 θ_2 滑桿至 240° 點選「旋轉第二次」按鈕
--------------------------	--	-------------	---

2-2 學生能發現藝術與數學兩者跨領域的結合之美



六、課程回顧

(一)總結性的歸納

(1)開啟回顧學習內容階段的說明

各位同學們，經過一系列的推導和努力，我們終於完成旋轉後的幾何圖形了，那我們來一起回頭看看大家是怎麼走到這一步的吧！

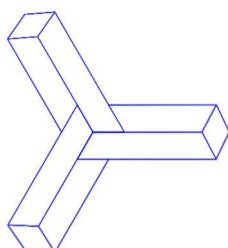
(2)回顧引入內容

我們一開始從艾薛爾的作品《漩渦》出發，發現其實這個圖案就是由一隻魚的圖形，經過旋轉和伸縮鑲嵌而成，然後我們在這堂課當中，討論旋轉的情況



(3)回顧課程內容

當我們要開始討論旋轉圖形時，我們發現所謂「對圖形的旋轉」，就是在平面上，對一個圖形做線性變換。我們知道一個線性變換可以用矩陣的方式表示，再求出旋轉矩陣的過程中，我們先選出 (1,0) 和 (0,1) 當作參考點，看看旋轉之後的位置，最後決定出逆時針旋轉 θ 角的矩陣的長相是 $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ，最後用它來求出旋轉後的點，並完成我們的圖形。



2-1 學生能認識艾薛爾作品的獨特性

2-2 學生能發現藝術與數學兩者跨領域的結合之美

2-3 學生能獲得圖形旋轉與鑲嵌美感體驗

1-2 學生能理解以選取單位點的方式推導旋轉矩陣通式的過程

1-3 學生能藉由旋轉矩陣找出參考點旋轉後的點

1-1 學生知道旋轉矩陣的基本形式

六、3

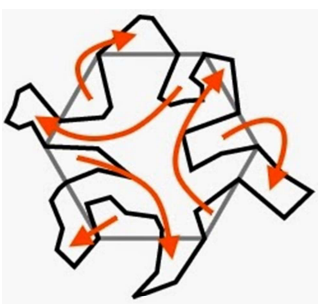
(一)3

(1)1

(2)1

(3)1

回顧完後提醒學生學習單背面的回家作業

2-2 學生能發現藝術與數學兩者跨領域的結合之美 2-1 學生能認識艾薛爾作品的獨特性	七、回家作業：圖形探究與實作 蜥蜴鑲嵌的觀察：  (一)圖形旋轉的觀察與實作 先觀察局部的圖案，讓學生發現整體的鑲嵌圖形，是由一個圖形旋轉而來  (二)艾薛爾圖形的創作方法及概念 讓學生觀察艾薛爾作品圖形，提出問題： 所有的圖形經過旋轉之後都能進行類似的鑲嵌圖形嗎？以下是艾薛爾創作蜥蜴圖形的想法——由一個簡單的正六邊形進行拼貼。看看艾薛爾如何由一個完整的圖形構造出可鑲嵌的圖形，並嘗試創造出屬於你的鑲嵌圖案 	七、課後作業	課後作業	
---	--	---------------	-------------	--

肆、教學評量

單元教學目標	評量方式	備註
1-1 學生知道旋轉矩陣的基本形式	口頭評量、形成性評量、課堂例題、課後作業	
1-2 學生能理解以選取單位點的方式推導旋轉矩陣通式的過程	口頭評量、形成性評量	學生只要知道可以從參考點求取旋轉矩陣的想法即可
1-3 學生能藉由旋轉矩陣找出參考點旋轉後的點	口頭評量、形成性評量、課堂例題、課後作業	
2-1 學生能認識艾薛爾作品的獨特性	口頭評量	

2-2 學生能發現藝術與數學兩者跨領域的結合之美	口頭評量	視學生程度，可增加額外補充(潘洛斯三角形)的評量
2-3 學生能獲得圖形旋轉與鑲嵌美感體驗	口頭評量	包含自創圖形的探究與實作

伍、附錄

一、GGB 檔案連結

活動二：<https://www.geogebra.org/m/am423zcp>

活動五：<https://www.geogebra.org/m/uzjfgcn3>

二、課堂學習單

學習單正面：

「旋」渦之美 課程學習單

班級：_____ 姓名：_____ 座號：_____

1. 旋轉矩陣的基本認識

在求出旋轉矩陣的過程中，我們會選出 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 為參考點

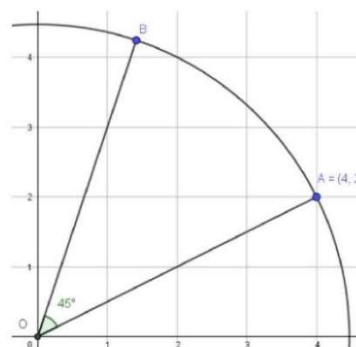
假設我們旋轉的角度是 θ

- $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 在經過旋轉 θ 角後，會到達 _____，是旋轉矩陣的第 _____ 行
- $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 在經過旋轉 θ 角後，會到達 _____，是旋轉矩陣的第 _____ 行

因此旋轉 θ 角的旋轉矩陣為 _____

2. 習題演練

如圖，已知 A 點坐標為 (4, 2)，B 點為 A 點以原點為旋轉中心，逆時針旋轉 45° 的點，試求 B 點坐標



學習單背面：

「旋」渦之美 課程學習單

3. 艾薛爾圖形創作的探索（加分作業）

以下是艾薛爾的創作作品《E025 蜥蜴》，請同學們觀察圖形回答下列問題：



(1) 圖形觀察

右圖是圖形中的一部分，請同學們想想看：

你認為圖中的深藍色蜥蜴和綠色蜥蜴有什麼的關係呢？

是否能將其中一個圖形透過某個課堂中提過的線性變換

（伸縮、平移及旋轉）達到另一個圖形呢？

你能不能從上面的問題中，推出整個圖形是如何完成的呢？

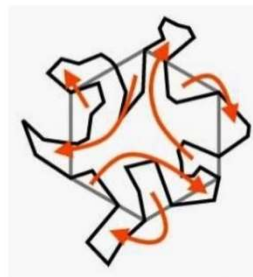


(2) 艾薛爾圖形的創作

同學們想看看：所有形狀重複的圖形都能進行鑲嵌嗎？

右圖是艾薛爾創作蜥蜴的構圖：一隻可以鑲嵌的蜥蜴來自一塊完整正六邊形的貼貼補補。

請你仿照艾薛爾的創作理念，試著在空白紙上設計出屬於你的鑲嵌圖形，並在下一堂課與同學們分享



陸、參考資料

- 一、十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校-數學領域
- 二、翰林出版事業股份有限公司：高中數學課本第四冊 A
- 三、南一書局企業股份有限公司：高中數學課本第四冊 A
- 四、泰宇出版股份有限公司：高中數學課本第四冊 A
- 五、數學一點也不無聊：

https://mathisnohorrible.blogspot.com/2014/12/blog-post_6.html