

【附件 4】

112 學年度數學教學演示競賽活動比賽

教案

壹、設計理念

在三角學中，正餘弦的疊合是一個相對複雜的概念，在教學的過程中，學生容易失去學習動機。為了解決這個問題，在課程的一開始，將利用 GeoGebra 軟體讓他們親手操作並觀察正餘弦的疊合結果。透過這種直觀的學習方式來激發學生的學習興趣，接著再切入代數的角度來解釋正餘弦的疊合，讓學生了解其背後原理。相信透過這種實例的演練，可讓學生更好地理解疊合觀念，並掌握其運算方法。

此外，配合台北市生生用平板與 108 課綱所強調的科技融入教學，在課堂上使用 GeoGebra 軟體來增加課堂的互動性。學生需分組操作軟體，透過輸入指令來繪製出疊合圖形，藉此幫助他們理解疊合圖形的特性與幾何性質。而在輸入程式碼並繪製圖形的過程中，學生不僅能培養團結合作的能力，還能訓練他們利用所學解決問題的能力。最後，再搭配核心問題來進行驗收，以檢視本堂課學生的學習成效。

而在課程的尾聲，將說明疊合的運用—抗噪耳機的降噪功能，並搭配影片讓同學深入地了解抗噪耳機的運作原理，再利用題目讓同學理解其應用。相信透過這種將實際應用與理論基礎結合的教學方式，能讓學生更加欣賞並深入理解這個重要的數學概念。

貳、教學分析

一、教材分析

版本/課綱	泰宇版	翰林版	南一版
引入方式	漫畫人物觀察到海浪並非正弦函數，而是許多波疊合產生的，引入疊合的觀念	1.說明士兵以整齊的步伐通過橋梁，造成橋墩斷裂 2.抗噪耳塞以反向聲波抵銷噪音	以在空曠處通話有回音說明聲波共振現象，以此引入正餘弦波的疊加
推導方式	先複習和角公式，再以特殊角的和角公式觀察出疊合。 最後，推廣到以和角公式	將特殊點的函數值點在方格坐標中，發現疊加後的圖形很像正弦曲線，進而利用和差角公	以描點的方式，發現疊加後的圖形很像正弦函數的波浪圖形，以此猜測疊和函數可表示成

	證明 $a \sin x + b \cos x$ 的疊和公式	式推導得出疊合公式。	$y = r \sin(x + \alpha)$ ，接著以例題證明之：將 $y = r \sin(x + \alpha)$ 以和角公式展開，以此引入正餘弦的疊合
表徵應用	1. 表格表徵 將特殊點的函數值製成表格，以利繪圖 2. 圖形表徵 呈現 $\sin$ 與 $\cos$ 函數圖形，並請同學試著繪出疊合圖形 3. 符號表徵 以和差角公式推導出疊合公式 4. 文字表徵	1. 表格表徵 將特殊點的函數值製成表格，以利繪圖 2. 圖形表徵 呈現疊合函數的圖形，讓同學觀察其圖形也為正弦函數 3. 符號表徵 以和差角公式推導出疊合公式 4. 文字表徵	1. 圖形表徵 (1) 呈現疊合函數的圖形，讓同學觀察其圖形也為正弦函數 (2) 以幾何(直角三角形的長度疊加)證明疊合公式 2. 符號表徵 以和差角公式推導出疊合公式 3. 文字表徵
例題	1. 練習正餘弦的疊合 2. 利用疊合求最大值與最小值 3. 限定 x 的範圍，求疊合函數的最大值與最小值	1. 練習正餘弦的疊合 2. 利用疊合求最大值與最小值 3. 利用和角公式搭配疊合求最大值 4. 解疊合不等式 5. 結合物理，求兩交流電的疊加函數	1. 練習正餘弦的疊合 2. 利用疊合求最大值與最小值 3. 限定 x 的範圍，求疊合函數的最大值與最小值 4. 求扇形內接四邊形的最大面積
練習題	手腦並用 1. 利用提示點繪出疊合圖形 2. 利用 Desmos 探索正弦波的組合圖形 3. 以表格提示圖形的點並描點繪出疊合圖形 4. 利用 Desmos 觀察疊合 5. 抗噪耳機素養題	1. 練習正餘弦的疊合 2. 利用疊合求最大值與最小值 3. 利用和角公式搭配疊合求最大值 4. 解有範圍限制的疊合不等式 5. 結合物理，求兩交流電的疊加函數	1. 練習正餘弦的疊合 2. 限定 x 的範圍，求疊合函數的最大值與最小值 3. 給定直角三角形斜邊，求周長最大值 4. 利用圖形的平移，將正弦的疊合轉為餘弦
	動動筆 1. 練習正餘弦的疊合 2. 將疊合函數與和角函數配對		

	3. 正餘弦的疊合觀念題 4. 限定 x 的範圍，求疊合函數的最大值與最小值		
素養結合	1. 利用 Desmos 製造不同波形的海浪 2. 利用抗噪耳機的原理求疊合函數	1. 引入物理交流電的波函數，讓學生將數學和物理的學習內容結合 2. 結合生活，求通過魚塭的橋長度的最大值	1. 以數學軟體繪製港口水深的函數圖形 2. 利用 GeoGebra 探索不同頻率的正弦函數依照不同比例所疊加出來的函數圖形
延伸概念	介紹抗噪耳機的原理	1. 以正餘弦函數描述水波、電波等 2. 疊加產生共振現象	於素養櫥窗提及可透過不同頻率及振幅的正餘弦函數信號的合成而得到傅立葉級數

二、學生分析

(一) 認知層面

學生在開學的前幾堂課中已經掌握了如何使用 GeoGebra 軟體進行圖形繪製。而在上一堂課中，已經在電腦教室中利用 GeoGebra 軟體理解了三角函數的圖形以及初步的疊合概念。從整體來看，學生的程度屬於中等，大部分的學生都能夠理解並掌握課程內容。

(二) 情意層面

本班級的學生為自然組的學生，對數學有較高的需求。因此，希望在教學過程中，結合一些物理相關的知識，幫助學生將數學和物理的知識連結在一起，從而達到融會貫通的效果。

然而，本單元的內容相對較為困難，學生在學習過程中可能會感到困惑，甚至可能會失去學習的興趣。為了解決這個問題，在課程中加入了實作部分，讓學生操作 GeoGebra 軟體，增加趣味性。同時，還設計了一些與日常生活相關的素養題，以此來激發學生的學習興趣和動機。希望透過這種方式，能夠讓學生更好地理解 and 掌握本單元的內容。

三、教學方法分析

(一) 直接講述法

向學生直接講述學習內容，並配合粉筆的顏色安排和學習單的提示來輔助他們的學習。透過詳細的說明與推導，期許學生能達到關聯性理解。這種教學方式不僅有助於學生理解課程內容，也能提高他們的解題能力。

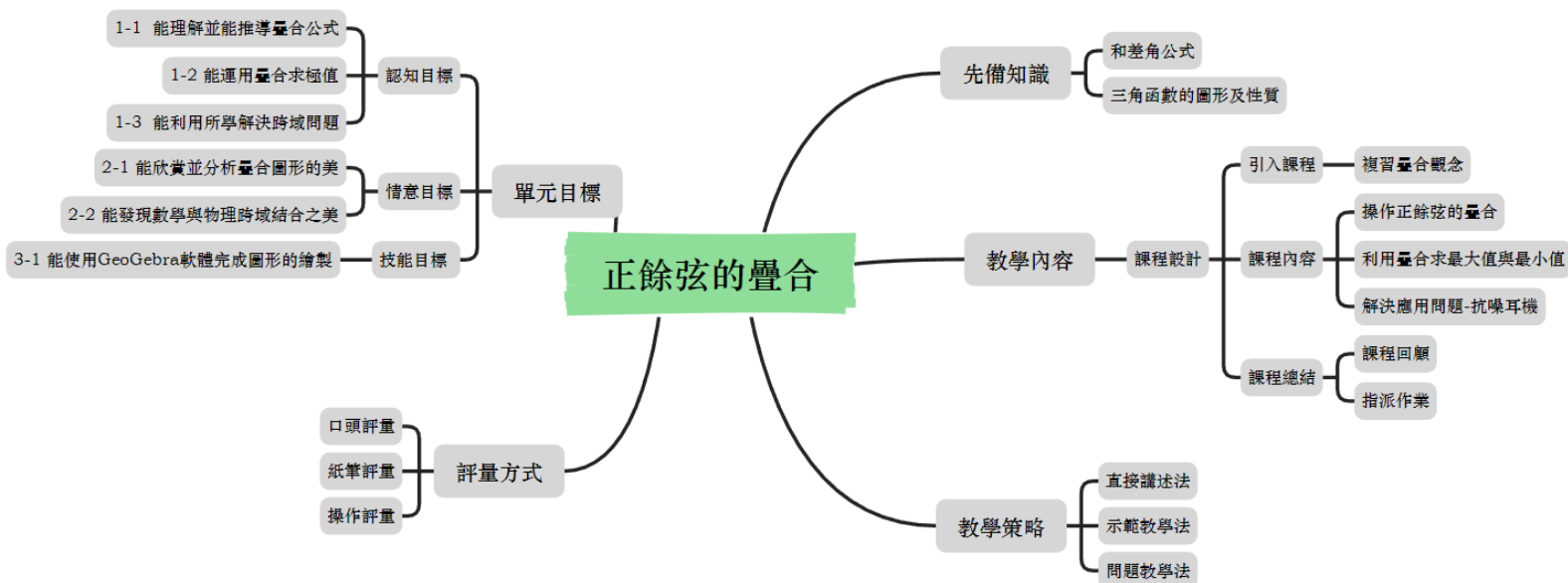
(二) 示範教學法

透過老師的逐步示範解題，配合 GeoGebra 軟體的輔助，以及學生的實際練習，期望學生能夠藉此熟練疊合的運用，並提升解題能力。這種教學方式旨在讓學生在理解和應用知識方面能有所進步。

(三) 問題教學法

在課堂中，採用向學生提出問題的方式，透過互動引導學生跟著思考。這種方式不僅能更好地掌握學生的學習狀況，還能根據學生的反應調整教學速度。期望透過這種教學方式，增強師生之間的互動，並更加關心每一位同學的學習情況。

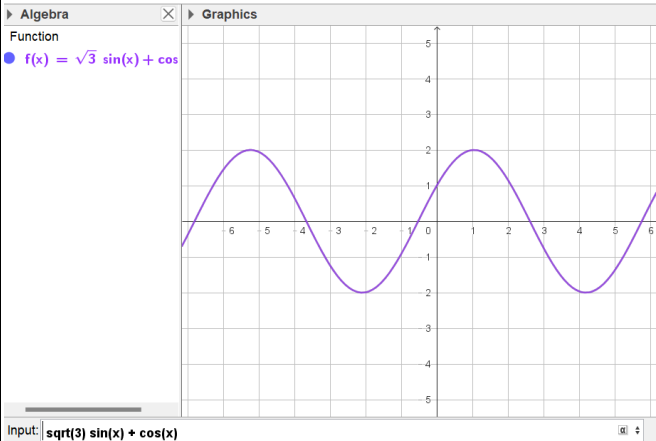
四、課程概念架構圖



參、教學活動設計

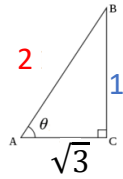
單元名稱	正餘弦的疊合	適用年級	高二上數 A
課程名稱	正餘弦的疊合	教學時間	一節 50 分鐘，共 3 節 (此為第 2 節)
教材版本	泰字版，輔以翰林版		
教學準備	老師：課堂簡報、學習單、課本、投影機、筆電（內含 ggb 軟體） 學生：學習單、課本、平板（內含 ggb 軟體）		

能力指標/學習表現	分年細目/學習內容	單元教學目標			
s-V-1：理解三角比的意義，熟練其彼此關係與運算操作，能靈活應用於等式或函數，並能用以推論及解決問題 f-V-3：認識三角函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以正弦函數為數學模型的週期性現象，並能用以溝通和解決問題	F-11A-2 正餘弦的疊合： 同頻波疊合後的頻率、振幅	1. <u>認知目標</u>： 1-1 能理解並能推導疊合公式 1-2 能運用疊合求極值 2. <u>情意目標</u>： 2-1 能欣賞並分析疊合圖形的美 2-2 能發現數學與物理跨域結合之美 3. <u>技能目標</u>： 3-1 能操作 GeoGebra 軟體完成圖形的繪製			
單元教學目標	教學內容	時間	評量方式	備註	
	註：網底字為預期學生會回答的答案) 壹、 準備活動 (一) 複習上次課程內容 在上周的課程中，我們到電腦教室用 GeoGebra 觀察到了將 $\sin x$ 和 $\cos x$ 兩個函數圖形相加仍然是一個正弦函數。 誰能告訴我這種將兩個三角函數相加的過程在數學上稱為什麼呢？ 學生回答：疊合 沒錯！今天我們要延續上次的課程，繼續探討疊合的相關問題。	2 分鐘	口頭評量		
1-1 能理解並能推導疊合公式	貳、 發展活動 (一) 介紹疊合的操作 老師先利用上次的回家作業來跟同學說明如何操作疊合 【例題 1】(回家作業) $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ (1) 若要將 $\sqrt{3} \sin x + \cos x$ 轉換成 $A \sin(x + \theta)$，則 A、θ 為何？($A > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) (小提示：可以先試著用 GeoGebra 觀察	15 分鐘	口頭評量 紙筆評量 操作評量		

3-1 能操作 GeoGebra 軟體完成圖形的繪製	$\sqrt{3} \sin x + \cos x$ 的圖形) (2) 此函數的振幅、週期、最大值與最小值為何？ (3) 試著將此圖形畫在下方作答區中？ 請問各位有成功觀察出 A、θ 的值為何嗎？ 沒成功做出也沒關係，老師演示一下如何用 GeoGebra 觀察： 首先，建立 $\sqrt{3}\sin x + \cos x$ 的圖形 (在指令列輸入“$\text{sqrt}(3) \sin(x) + \cos(x)$”)  我們知道 A 的值為振幅，而振幅的算法為最大值減平衡位置，所以由圖可知 A 為 2 但平移量 θ 好像無法直接由圖得知，所以我們將嘗試用代數的方法將 θ 求得 <sol> 首先，由剛剛的觀察，我們知道 $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ $= 2\sin(x + \theta)$ 而我們可利用和角公式將 $\sin(x + \theta)$ 展開得 $= 2(\sin x \cos \theta + \cos x \sin \theta)$ 為了方便觀察，老師整理一下此式 $= 2\cos \theta \sin x + 2\sin \theta \cos x$ 跟原式比較，得知 $\cos \theta$ 為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin \theta$ 為 $\frac{1}{2}$ 因此，現在的問題是：當 θ 為何時， 可使 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin \theta = \frac{1}{2}$？ 我們發現 $\cos \theta$、$\sin \theta$ 皆為正，所以 θ 為第一象限	使用 GeoGebra 軟體
-----------------------------------	---	-----------------------

角，因此可以透過直角三角形來輔助我們思考，

因為 $\cos \theta$ 為 $\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$ ，因此可畫出下圖



由圖可知 θ 為 30 度，但老師提過：要將度度量轉為弧度量，因此 θ 為多少呢？

學生回答： $\frac{\pi}{6}$

沒錯，所以答案為 $2 \sin(x + \frac{\pi}{6})$

但這題的振幅是用觀察 GeoGebra 而得的，可是考試時不能使用軟體，那應該如何用算的求出 A 呢？

各位同學可以觀察一下， $A=2$ ，在剛剛的計算過程中哪裡有出現過？

學生回答：直角三角形的斜邊

沒錯！但為什麼我們要乘斜邊呢？

這是因為在將 $\sqrt{3}$ 化為 $\cos \theta$ 、1 化為 $\sin \theta$ 的過程中，我們做了除以斜邊 2 的動作，但為了讓等式成立，我們需要在前面乘一個斜邊 2，因此需要將此 $\sin$ 函數乘以 2。

好，恭喜各位，我們成功的完成了疊合的操作，也做完了(1)小題

接著，讓我們做(2)小題，求出這個函數的性質

(2)

$$y = \sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin(x + \frac{\pi}{6})$$

<sol>

1. 振幅：因為 $2 \sin(x + \frac{\pi}{6})$ 函數的前面乘以 2，所

以由 1-3，我們可知振幅為 2。此外，也可由兩股為 $\sqrt{3}$ 與 1 的直角三角形斜邊中求得振幅

$$\text{為 } \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

2-1 能欣賞並
分析疊合圖形
的美

2. 最大值與最小值：

我們知道 $-1 \leq \sin(x + \frac{\pi}{6}) \leq 1$

所以同乘 2 倍得 $-1 \times 2 \leq 2\sin(x + \frac{\pi}{6}) \leq 1 \times 2$

所以最大值為 2，最小值為 -2

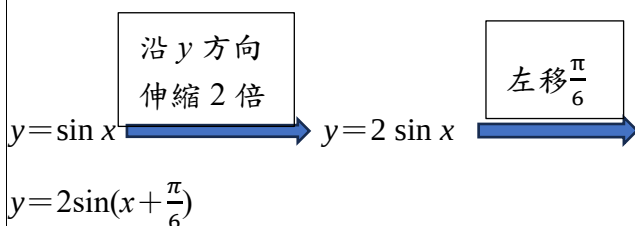
3. 週期：由於 x 的係數仍然為 1，因此週期不變，還是 2π

(3) 圖形：

若由 $\sqrt{3} \sin x + \cos x$ 畫出圖來十分複雜，

但由(1)得知 $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin(x + \frac{\pi}{6})$ ，因

此可利用 $2 \sin(x + \frac{\pi}{6})$ 來繪圖，步驟如下：



很不錯喔！事實上，只要是週期相同的正弦和餘弦相加都會和 $y = \sin x$ 的某種平移和伸縮圖形相同喔！

透過這個例題，我們可以發現藉由疊合可將複雜的函數轉我們熟悉的 $A \sin(x + \theta)$ 形式，甚至可藉由和角公式進一步將振幅與平移量求出。

接著，換各位練習了，請完成以下練習題：

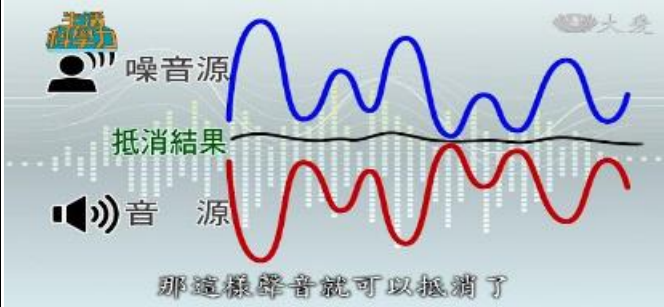
【練習 1】

請將 $y = \sin x + \cos x$ 化為 $A \sin(x + \theta)$ 的形式
($A > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$)

5 分鐘

紙筆評量

1-2 能運用疊合求極值	(二) 利用疊合求最大值與最小值 由例題 1，我們發現經由疊合可幫助我們求出函數的振幅，進而得到最大值與最小值。但如果題目只問我們極值，事實上，可直接由直角三角形的斜邊來輔助我們得到振幅。接著，讓老師來深入說明這種迅速求極值方式 【例題 2】(泰宇版例題 2) 找出 $y=5 \sin x+12 \cos x$ 的最大值與最小值 <sol> <u>法一：</u> $y=5 \sin x+12 \cos x$ $=13\left(\frac{5}{13} \sin x+\frac{12}{13} \cos x\right)=13 \sin (x+\theta)$ 其中，$\cos \theta$ 為 $\frac{5}{13}$，$\sin \theta$ 為 $\frac{12}{13}$ 而此函數振幅為 13 我們知道 $-1 \leq \sin (x+\theta) \leq 1$ 所以同乘 13 倍得 $-1 \times 13 \leq 13 \sin (x+\theta) \leq 1 \times 13$ 所以最大值為 13，最小值為 -13 <u>法二：</u> ∵ 兩股為 5、12 的直角三角形之斜邊為 $\sqrt{5^2+12^2}=13$ $\therefore -13 \leq 5 \sin x+12 \cos x \leq 13$ $\Rightarrow \text{最大值}=13, \text{最小值}=-13$ 現在，讓老師來說明以下色框的結論：由剛剛的例題可知 $y=a \sin x+b \cos x$ 可以疊合成 $\sqrt{a^2+b^2} \sin (x+\varphi)$ 因此我們可以得到以下重要結論：(南一版 P.48) 函數 $y=a \sin x+b \cos x$ 的圖形與性質： (1) 函數 $y=a \sin x+b \cos x$ 的圖形是以 2π 為週期，$\sqrt{a^2+b^2}$ 為振幅的波狀圖形。 (2) 函數 $y=a \sin x+b \cos x$ 的最大值為 $\sqrt{a^2+b^2}$，最小值為 $-\sqrt{a^2+b^2}$。 【練習 2】(泰宇版類題 2) 找出 $y=3 \sin x+4 \cos x$ 的最大值與最小值	10 分鐘 5 分鐘	口頭評量 紙筆評量 紙筆評量	
---------------------	--	--------------------------	----------------------------------	--

2-2 能發現數學與物理跨域結合之美	(三) 抗噪耳機問題 接著，讓老師來說明疊合在生活上的應用—抗噪耳機。 抗噪耳機是使用內建麥克風分析周圍的環境聲波，並產生相反的聲波來疊合抵銷周圍的聲音。 以下老師將播放一個影片進一步說明此原理： 【玩轉聲音】反噪音實驗-噪音 降噪耳機 (播放前 2 分 24 秒：連結如下 https://reurl.cc/mrlmr1)  看完影片後，相信同學已經深入地了解了其原理，現在請各位同學幫助工程師完成此抗噪耳機的設計。 【例題 3】(泰宇版手腦並用 5) 有一名工程師想要設計一個可以主動抵抗噪音的耳機，他希望能夠利用波的疊加原理，在某個點上將這樣的聲音完全去除。 (1)若欲將 $y = \sqrt{2} \sin t$ 的音波消除，我們希望產生另一個音波 $y = a \sin(t + \theta)$， 使得 $y = \sqrt{2} \sin t + a \sin(t + \theta) = 0$， 求一組適當的 a ($a > 0$) 和 θ。 (2)現在有一個晶片 A 能製 $y = \sin(t + \varphi)$ 的聲音， 有另一個晶片 B 可以製造 $y = \cos(t + \varphi)$ 的聲音。 請問他應該各放幾個晶片 A 和晶片 B 才能製造出我們想要的振幅？ <sol> (1) 1° $\because$ 要使聲音完全抵消 $\therefore$ 產生的反向波之振幅 a 也須為 $\sqrt{2}$ 2° 展開 $a \sin(t + \theta) = \sqrt{2} \sin(t + \theta)$	10 分鐘	口頭評量 紙筆評量	播放 YouTube 影片
---------------------------	--	--------------	----------------------	--------------------------

	$= \sqrt{2} \sin t \cos \theta + \sqrt{2} \cos t \sin \theta$ 因為要使兩者抵銷， 所以 $\cos \theta$ 為 -1，$\sin \theta$ 為 $0 \Rightarrow \theta$ 為 π 故所求之 $a = \sqrt{2}$，$\theta = \pi$ (2) 為作業，請同學回去思考需要幾個晶片 A 和晶片 B 才能製造出振幅為 $\sqrt{2}$ 的波			
	參、綜合活動 (一) 指派作業 作業為【例題 3 (2)】題目如下： (2) 現在有一個晶片 A 能製 $y = \sin(t + \varphi)$ 的聲音，有另一個晶片 B 可以製造 $y = \cos(t + \varphi)$ 的聲音。請問他應該各放幾個晶片 A 和晶片 B 才能製造出我們想要的振幅？ 此外，請同學回去務必練習如何用 GeoGebra 繪製疊合圖形，在下堂課還需要做相關操作 (二) 回顧今日課程 今天我們學到了很多東西。 請與同學討論以下問題來複習今天的課程： 1. 兩個三角函數必須滿足什麼條件才能做疊合？ 2. 疊合過程中需要用到哪個公式？ 3. $y = a \sin x + b \cos x$ 疊合後 y 的範圍為何？	3 分鐘		先讓同學討論，再公布解答

肆、教學評量

單元教學目標	評量方式	備註
1-1 能理解並能推導疊合公式	口頭評量 紙筆評量 操作評量	搭配 GeoGebra 軟體
1-2 能運用疊合求極值	口頭評量 紙筆評量	
2-1 能欣賞並分析疊合圖形的美	紙筆評量	
2-2 能發現數學與物理跨域結合之美	口頭評量 紙筆評量	搭配 YouTube 影片
3-1 能操作 GeoGebra 軟體完成圖形的繪製	操作評量	

伍、參考資料

- 一、十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校-數學領域
- 二、十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校
 —數學領域課程手冊
- 三、翰林版高中數學課本 3A
- 四、南一版高中數學課本 3A
- 五、泰宇版高中數學課本 3A
- 六、龍騰版高中數學課本 3A

陸、學習單

正餘弦的疊合 學習單

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、 疊合的操作

【例題 1】

$$y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$$

(4) 若要將 $\sqrt{3} \sin x + \cos x$ 轉換成 $A \sin(x + \theta)$ ，則 A 、 θ 為何？($A > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$)

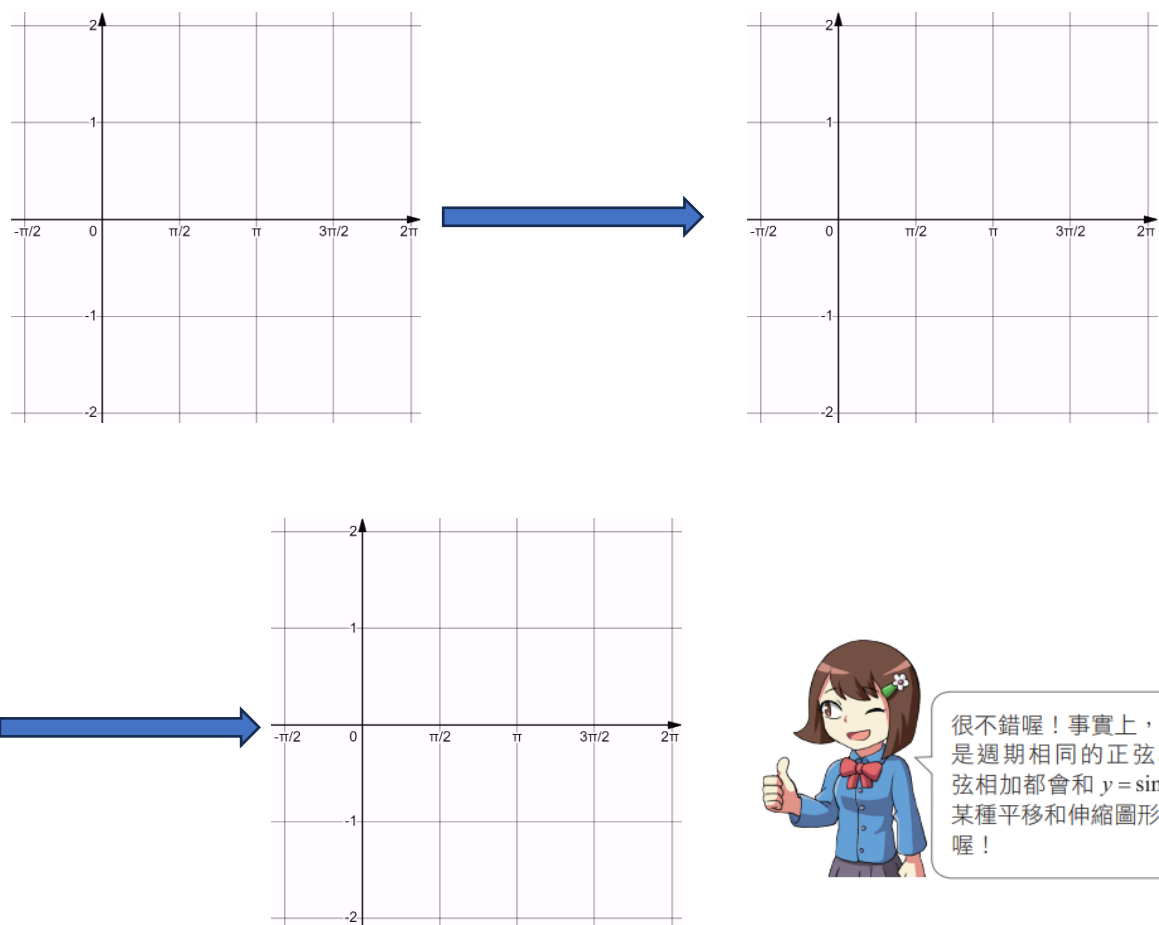
(小提示：可以先試著用 GeoGebra 觀察 $\sqrt{3} \sin x + \cos x$ 的圖形)

(5) 此函數的振幅、週期、最大值與最小值為何？

(6) 試著將此圖形畫在下方作答區中？

<sol>

(3)



很不錯喔！事實上，只要是週期相同的正弦和餘弦相加都會和 $y = \sin x$ 的某種平移和伸縮圖形相同喔！

小提醒

從【例題 1】中，我們發現在操作疊合時，需要利用前面所學的哪個公式來幫助我們進行疊合？

【練習 1】

請將 $\sin x + \cos x$ 化為 $A \sin(x + \theta)$ 的形式 ($A > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$)

<sol>

二、 最大值與最小值

【例題 2】

找出 $y=5 \sin x+12 \cos x$ 的最大值與最小值

<sol>

函數 $y=a \sin x+b \cos x$ 的圖形與性質：

(1) 函數 $y=a \sin x+b \cos x$ 的圖形是以 2π 為週期， $\sqrt{a^2+b^2}$ 為振幅的波狀圖形。

(2) 函數 $y=a \sin x+b \cos x$ 的最大值為 $\sqrt{a^2+b^2}$ ，最小值為 $-\sqrt{a^2+b^2}$ 。

【說明】

【練習 2】

找出 $y=3 \sin x+4 \cos x$ 的最大值與最小值

<sol>

三、 抗噪耳機問題

抗噪耳機是使用內建麥克風分析周圍的環境聲波，
並產生相反的聲波來疊合抵銷周圍的聲音。

請先觀看影片：



【例題 3】

有一名工程師想要設計一個可以主動抵抗噪音的耳機，他希望能夠利用波的疊加原理，在某個點上將這樣的聲音完全去除。

(1)若欲將 $y = \sqrt{2} \sin t$ 的音波消除，我們希望產生

另一個音波 $y = a \sin(t + \theta)$ ，使得 $y = \sqrt{2} \sin t + a \sin(t + \theta) = 0$ ，

求一組適當的 a ($a > 0$) 和 θ 。

<sol>

【作業】

(2)現在有一個晶片 A 能製 $y = \sin(t + \varphi)$ 的聲音，

有另一個晶片 B 可以製造 $y = \cos(t + \varphi)$ 的聲音。請問他應該各放幾個晶片 A 和晶片 B 才能製造出我們想要的振幅？

<sol>

四、 回首來時路

請與同學討論以下問題來複習今天的課程：

1. 兩個三角函數必須滿足什麼條件才能做疊合？
2. 疊合過程中需要用到哪個公式？
3. $y = a \sin x + b \cos x$ 疊合後 y 的範圍為何？