

壹、設計理念

貝氏定理為機率理論中重要的內容之一，透過貝氏定理的運用，我們可以靈活轉換機率的條件，並發現條件機率的特殊關係。本堂課引入近年新冠肺炎疫情與快篩試劑的普及，藉由貼近學生生活經驗的情境引起學習動機；並結合媒體識讀，透過貝氏定理的運用協助學生正確判讀媒體資訊，並解決生活中的問題；讓學生能藉由本堂課的學習了解貝氏定理的意義，體會數學知識在生活中的實用性與重要性。

貳、教學分析

一、教材分析

版本/課綱	泰宇	翰林	龍騰
引入方式	以高中生聯誼中，應用貝氏定理計算合拍機率的情境，引入學習內容。利用貼近高中生日常生活的實例，引起學生學習動機。	以美國電視節目的選門遊戲引入，說明貝氏定理將可以運用於遊戲的策略考量。利用趣味化的遊戲激起學生的好奇心，引起學生主動思考的意願。	利用班上男女通過英檢的比率當作引例，連結前章所學的條件機率、文式圖以及樹狀圖，實際進行解題。
內容順序	古典機率→客觀機率→主觀機率→條件機率→ 貝氏定理	主觀機率→客觀機率→條件機率→獨立事件→條件機率的乘法法則→ 貝氏定理	條件機率→獨立事件→ 貝氏定理 →古典機率、客觀機率與主觀機率
教學順序	- 以引入內容為例，說明事前機率以及事後機率的定義，並簡述貝氏定理的應用方式 - 引入例題並繪製樹狀圖解題，帶學生觀察條件機率的延伸應用 - 以集合論的分割推導出貝氏定理的一般形式 - 例題練習	- 說明集合分割的嚴謹定義，以及機率論的加法法則當作貝氏定理的先備知識 - 以範例輔助說明貝氏定理，再抽象成符號表示 - 例題練習並回扣引入範例	- 引入例題，繪製樹狀圖帶學生觀察條件機率的延伸應用 - 以圖形表徵說明集合的分割，並以抽象化符號推導出貝氏定理 - 例題練習
表徵應用	- 圖形表徵 - 例題利用樹狀圖輔助說明解題流程，呈現條件機率的觀念 - 先將樣本空間進行分割，再以事件套入分割，說明貝氏定理的一	- 文字與符號表徵 - 以文字舉例說明分割的概念，並在說明分割定義時輔以集合表徵對應 - 以文字舉例說明加法法則，並以集合表徵呈現加	- 圖形表徵 - 先呈現文氏圖與樹狀圖，說明範例解題流程 - 先將樣本空間進行分割，再以事件套入分割，說明貝氏定理的一般化形式

	般化形式 2. 文字與符號表徵 (1) 利用文字說明定義事前及事後機率等專有名詞 (2) 貝氏定理的符號表徵先表示 2 個事件的 2 種寫法，再呈現 n 個事件的情形 3. 表格表徵 引入疫情資訊例題時，以表格清楚呈現疫情相關資訊	法法則 (3) 貝氏定理的符號表徵先表示 2 個事件的 2 種寫法，再呈現 n 個事件的情形 2. 圖形表徵 (1) 說明分割時呈現樣本空間的分割 (2) 說明加法法則時，以事件套入分割 (3) 介紹完貝氏定理後，以樹狀圖作為解題工具	2. 文字與符號表徵 配合圖形表徵輔助說明貝氏定理，再以符號表徵呈現一般化的形式
例題與類題安排	1. 以條件機率、樹狀圖等先備知識進行解題，作為貝氏定理的前例 2. 生活情境例題，3 種情形的貝氏定理 3. 結合疫情的實境例題	1. 條件機率乘法法則的應用例題作為後續貝氏定理的先備概念 2. 情境例題，貝氏定理在 2、3 種情形下的應用 3. 結合疫情，估計快篩試劑的準確性	1. 貝氏定理的應用練習 2. 結合疫情，篩檢結果的準確率估計
素養結合	1. 引入範例與例題安排選擇 email 垃圾信處理、體育老師資訊處理問題等問題，貼近學生生活，引起學習動機 2. 以「是否應該普篩」的重要議題，引領學生發現數學對現實社會的影響力	1. 以美國電視節目的遊戲作為引例，可提升學習內容的趣味性，也藉此培養學生增廣知識的意願 2. 例題安排配合保險公司策略分析、企業管理以及快篩試劑等應用，讓學生了解學習內容在生活中的重要地位	1. 先從實際問題引發學生思考，具備數學探究的基本精神 2. 疫情例題培養學生正確判讀資訊的能力

(一) 認知層面

學生已學習過條件機率以及獨立事件的相關單元，並能經由引導了解事件的分割，以此理解貝氏定理的涵義。

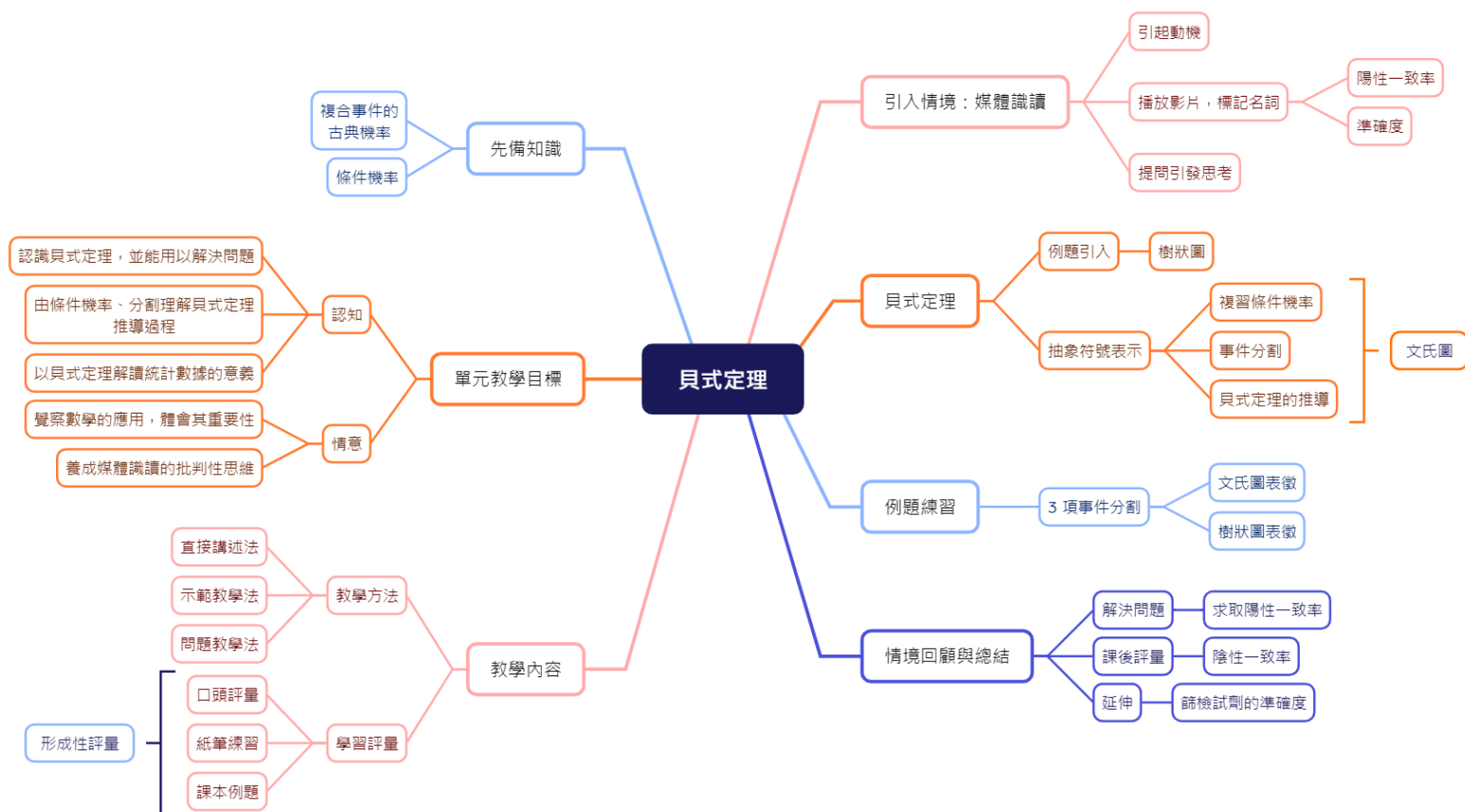
學生為中高數學需求，並經歷過疫情時代的影響。若能以疫情為相關主題，結合學習內容進行教學設計，將有效提升學習動機。

(一) 直接講述法

向學生直接講述學習內容，配合板書、學習單的安排，利用回憶條件機率的先備知識，搭配文字及符號表徵、圖形表徵與動作表徵，促進學生思考，並了解本單元之學習內容。

實際演示利用樹狀圖解題的過程與想法，藉此讓學生理解如何解決貝氏定理的相關例題，以及媒體中的重要名詞所代表的意義。

以新聞媒體上的名詞所引發的問題為主軸，培養同學反思媒體資訊的判讀能力，並能將所學的數學知識應用於媒體識讀中。

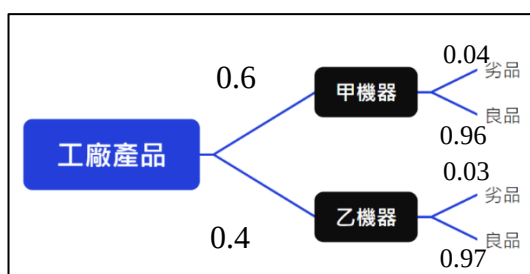


參、教學活動設計

單元名稱	條件機率與貝氏定理	適用年級	高中二年級														
課程名稱	貝氏定理	教學時間	50 分鐘														
教材版本	翰林版																
教學準備	學習單																
能力指標/學習表現	分年細目/學習內容		單元教學目標														
d-V-3 理解事件的不確定性，並能以機率將之量化。理解機率的性質並能操作其運算，能用以溝通和推論。	D-11A-3 貝氏定理：條件機率的乘法公式，貝氏定理及其應用。		1. 認識並理解貝氏定理，並能以文氏圖或樹狀圖解決相關問題 2. 覺察貝氏定理在生活中的應用，能以貝氏定理概念對數據作合理的解讀與分析 3. 能對媒體資訊保持合理的批判性思維，並體會媒體識讀的重要性														
單元教學目標	教學內容		時間	評量方式	備註												
	1. 引入情境 (1) 引起動機，自生活情境引入學習內容 【教師提問】 同學們是否有做過快篩呢？你知道快篩結果代表的意義嗎？快篩結果一定準確嗎？ 【預期同學回答】 分享自身經驗，並查覺快篩結果不一定準確。讓我們來看看媒體怎麼說： (2) 播放新聞影片，標記重點名詞 食藥署核准 3 居家快篩試劑準確度 8 成以上 https://reurl.cc/OjMmoD 影片時間：0：34～0：57		7 分鐘														
來源不明或未經驗實之 3款居家快篩試劑 食藥署核准 <table><thead><tr><th>廠牌</th><th>方法</th><th>陽性一致率</th></tr></thead><tbody><tr><td>羅氏 家用自我檢測套組</td><td>抗原</td><td>82%</td></tr><tr><td>盧西拉 家用確可易檢測試劑</td><td>核酸</td><td>90%</td></tr><tr><td>萊析樂 家用檢測組</td><td>核酸</td><td>90%</td></tr></tbody></table> 台南市 31-33 12:21:15 食藥署核准3居家快篩試劑 準確度8成以上 線上學習 停課不停學 請上「科普新視界」YouTube 台視訂閱 請同學們注意：新聞中的表格上寫「陽性一致率」分別為 82%, 90% 等，而在下方的字幕欄中寫「準確度」在 8 成以上。						廠牌	方法	陽性一致率	羅氏 家用自我檢測套組	抗原	82%	盧西拉 家用確可易檢測試劑	核酸	90%	萊析樂 家用檢測組	核酸	90%
廠牌	方法	陽性一致率															
羅氏 家用自我檢測套組	抗原	82%															
盧西拉 家用確可易檢測試劑	核酸	90%															
萊析樂 家用檢測組	核酸	90%															

認識並理解貝氏定理，並能以文氏圖或樹狀圖解決相關問題	【教師提問】 所以「陽性一致率」和「準確度」所代表的意思是一樣的嗎？同學可以經過本堂課的學習，再一起回來解答兩者的差異。 (3) 透過提問引發批判性思維 【教師提問】 新聞說準確度 8 成以上，如果今天用快篩試劑測出陽性，代表有至少 8 成的機率帶原嗎？ 【預期學生回答】 是。因為那就是準確率所代表的意思。 不是。好像要考慮到其他因素。 這個問題的解答好像似是而非，有人認為對，也有人認為不對。但當我們學完貝氏定理，答案就很明顯囉！ 2. 貝氏定理 (1) 啟蒙例引入 【例題引入】 請看翰林版例題 4： 例題 4 某工廠有甲、乙兩臺機器，其產量分別占總產量的 60 % 與 40 %。根據過去經驗知道甲機器產品中的 4 %，乙機器產品中的 3 % 為劣品，今任取一產品，且每個產品被取出的機會相同，則取出的產品為劣品的機率為何？ 工廠生產的產品中有兩層分類：首先有甲、乙兩台機器，這兩台機器中，又分別生產出劣品和良品。 利用題目資訊： 甲機器與乙機器所生產的良品分別佔 $60\% = 0.6$、$40\% = 0.4$，將這兩筆數據紀錄於樹狀圖： <pre> graph LR A[工廠產品] -- 0.6 --> B[甲機器] A -- 0.4 --> C[乙機器] B --> D[劣品] B --> E[良品] C --> F[劣品] C --> G[良品] </pre> 再者，甲機器產品中的 $4\% = 0.04$ 為劣品，而另一方面，甲機器所生產剩下的產品就是良品。因此，可以知道甲機器生產的產品中，有 $1 - 0.04 = 0.96$ 為良品。	20 分鐘	口頭評量 課本例題	發下貝氏定理課程學習單 配合學習單第 1 頁
-----------------------------------	---	--------------	-------------------------	--------------------------------------

同理，乙機器產品中的 $3\% = 0.03$ 為劣品，那麼良品的機率就是 $1 - 0.03 = 0.97$ 。
在樹狀圖上紀錄可得：



題目問題：取出為劣品的機率。

劣品可能來自甲機器，也可能來自乙機器。

甲機器提供的劣品佔比：

甲機器佔全體的 0.6 ，其中又有 0.04 為劣品，因此提供了 $0.6 \times 0.04 = 0.024$ 比例的劣品。

乙機器提供的劣品佔比：

乙機器佔全體的 0.4 ，其中又有 0.03 為劣品，因此提供了 $0.4 \times 0.03 = 0.012$ 比例的劣品。

因此總共有：

$0.024 + 0.012 = 0.036$ 比例的劣品。

在這個例子中，可發現一個事件可以經由不同種情況分割成許多不同部分，而我們所要介紹的貝氏定理，就是討論事件在分割情形下的機率關係。

(2) 貝氏定理介紹

以例題 4 為例，假設工廠所有生產的事件為樣本空間 S ，其中甲機器生產的事件為 A_1 ，乙機器生產的事件為 A_2 ；且工廠產品中屬於劣品的事件為 B 。

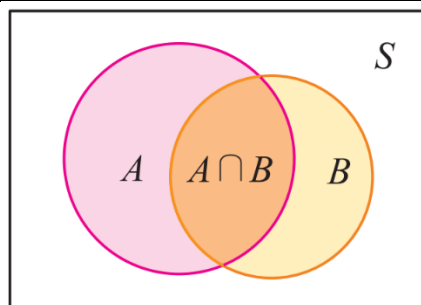
【教師提問】

例題 4 中，我們求出工廠生產劣品的機率。

而如果我們想知道任意選一項劣品，這項劣品來自於甲機器生產的機率為何？就必須使用貝氏定理。

【複習條件機率】

假設 A, B 為樣本空間中的兩事件，則在 A 事件發生的情況下， B 事件所發生的機率，記為 $P(A|B)$ ，如下圖所示：



此機率的計算方式為 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ 。

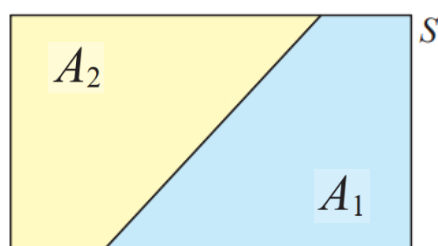
在例題 4 當中，任意選一項劣品，這項劣品來自於甲機器生產生產的機率，即：

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$

【事件的分割】

假設樣本空間為 S ，先看兩個事件的情況，假設這兩個事件是 A_1 和 A_2 。

分割就像是「切蛋糕」，把樣本空間切成不同的區塊，每一個區塊就是我們要討論的事件，如下圖所示：

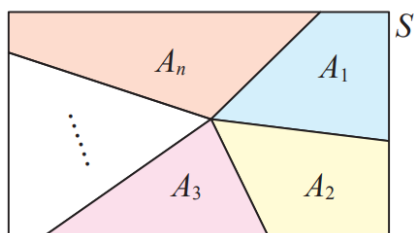


可以注意到，這兩個事件有以下兩個性質：

- 兩個事件彼此不相交
 - 兩個事件合起來，就是全部的樣本空間
- 在定義上，滿足這兩個性質的兩個事件之集合 $\{A_1, A_2\}$ ，就稱為樣本空間 S 的一組分割
- 在例題 4 當中，因為工廠生產的所有機器不是來自甲就是來自乙，故 A_1, A_2 滿足：

- A_1 和 A_2 彼此不相交
 - A_1 和 A_2 合起來，就是全部的樣本空間 S
- 所以例題 4 的 $\{A_1, A_2\}$ 是 S 的一組分割。

而如果有多個事件呢？就像是把樣本空間 S 切成多塊一點的蛋糕，假設事件為 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 如下圖所示：

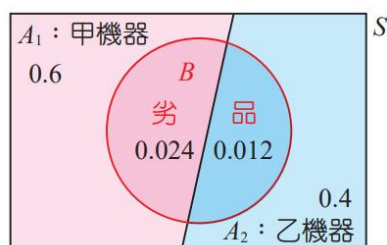


這些事件一樣滿足類似的兩項性質：

- 任意兩個事件彼此不相交
 - 所有事件合起來，就是全部的樣本空間
- 像這樣的事件集合起來，就是樣本空間 S 的一組分割。

【貝氏定理的推導】

有了條件機率與分割兩項工具，我們可以畫出事件的文氏圖：



注意所求為 $P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$

我們有甲、乙機器生產比例，即 $P(A_1), P(A_2)$

及甲、乙機器中劣品的機率 $P(B|A_1), P(B|A_2)$

我們想用這些條件（紅字）求出 $P(A_1|B)$

由條件機率的定義：

$$P(B|A_1) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(A_1)}, P(B|A_2) = \frac{P(B \cap A_2)}{P(A_2)}$$

故 $P(B \cap A_1) = P(A_1) P(B|A_1)$ ，

$$P(B \cap A_2) = P(A_2) P(B|A_2)$$

因此 $P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1) P(B|A_1)}{P(B)}$

接下來我們用紅字換掉 $P(B)$ 。

注意到 $\{A_1, A_2\}$ 是 S 的一組分割， B 在 S 當中

，因此兩者重疊的部分 $\{B \cap A_1, B \cap A_2\}$ 是 B

的一組分割。所以事件 B 的機率可拆成：

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)$$

因此 $P(A_1|B) = \frac{P(A_1) P(B|A_1)}{P(B)}$

$$= \frac{P(A_1) P(B|A_1)}{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)}$$

上述的這條等式，就稱為「貝氏定理」

如同分割可以有多種的情形，貝氏定理也可以討論多個分割的情況：

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)}$$

3. 例題練習

請看翰林版例題 6：

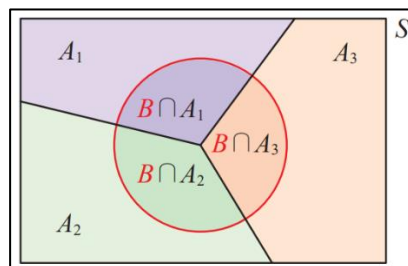
例題 6

展示櫃內有甲、乙、丙三廠牌的智慧型手機，其中甲占總量 20%，乙占 30%，丙占 50%。而甲、乙、丙三廠牌的待機時間超過 100 個小時的機率分別為 0.7、0.4、0.3。試問：

- (1) 若隨手挑一支手機，這支手機的待機時間超過 100 個小時的機率為何？
- (2) 若挑選的手機其待機時間超過 100 個小時，則此手機為甲廠牌的機率為何？

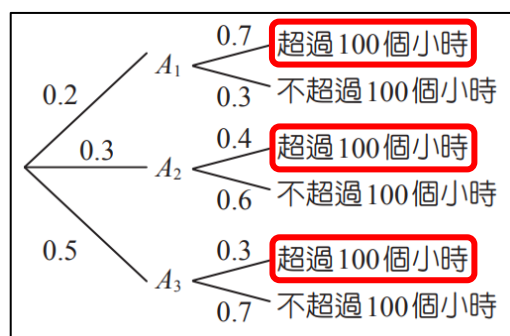
假設甲、乙、丙三家廠牌生產手機的事件分別為 A_1, A_2, A_3 ，待機時間超過 100 小時的手機事件為 B 。

(1) 題目要算的就是 $P(B)$ ，藉由文氏圖：



$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) \\
 &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) \\
 &\quad \text{(套入題目中的數字)} \\
 &= 0.2 \times 0.7 + 0.3 \times 0.4 + 0.5 \times 0.3 \\
 &= 0.41
 \end{aligned}$$

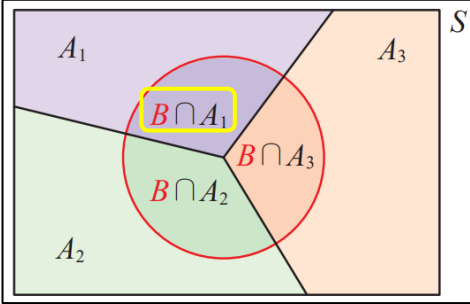
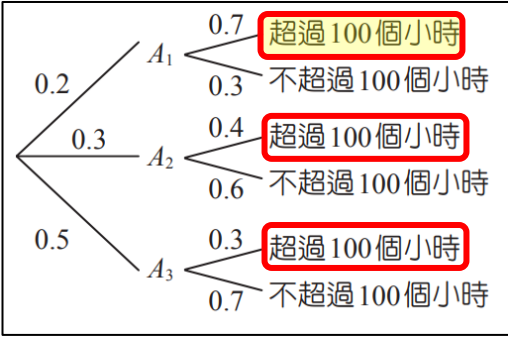
另一方面，我們也可以藉由樹狀圖解題：



8 分鐘

課本例題

配合學習單第 4 頁

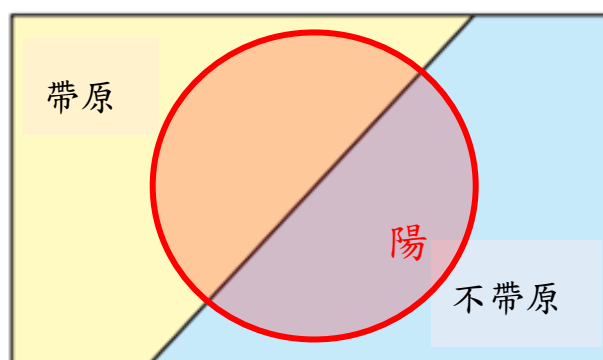
覺察貝氏定理在生活中的應用，能以貝氏定理概念對數據作合理的解讀與分析	待機時間超過 100 小時的機率為： 源於甲廠牌+源於乙廠牌+源於丙廠牌 $= 0.2 \times 0.7 + 0.3 \times 0.4 + 0.5 \times 0.3 = 0.41$ (2) 透過符號，題目要算的是 $P(A_1 B)$ 就文氏圖而言，$P(A_1 B)$ 是在事件 B 當中，$B \cap A_1$ 占事件 B 的比例。  以樹狀圖來看，可以當作組成事件 B 中，源自於 A_1 的部分貢獻了多少。  兩種圖示都能解釋，根據貝氏定理： $P(A_1 B) = \frac{P(A_1) P(B A_1)}{P(B)}$ $= \frac{P(A_1) P(B A_1)}{0.41} = \frac{0.2 \times 0.7}{0.41} = \frac{14}{41}$ 4. 情境回顧與總結 了解完貝氏定理的內容與應用，接著我們回到一開始快篩試劑準確度的問題。 (1) 翰林版例題 7 例題 7 已知某種快篩試劑對某病毒的檢驗，“偽陰率”為 20 %（即帶原者做檢驗有 20 % 的機會呈陰性反應，其他呈陽性反應），而“偽陽率”亦為 20 %（即未帶原者做檢驗有 20 % 的機會呈陽性反應，其他呈陰性反應）。現推估有 2 % 的民眾為此病毒帶原者，若小芬以此試劑檢驗結果呈陽性反應，試求她確實帶原的機率為何？	15 分鐘	課本例題	配合學習單第 5 頁
---	--	--------------	-------------	-------------------

使用快篩試劑時，試劑不會百分之百準確，有測試錯誤的機率；而民眾又可以分為帶原和不帶原兩種，故使用試劑的事件可分為以下情形。

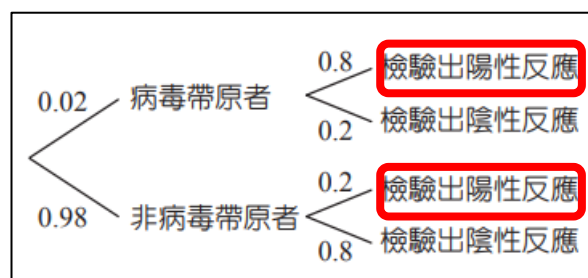
是否帶原 檢測結果	帶原	不帶原
陽性	(a)	(b)
陰性	(c)	(d)

- (a) 帶原者確實檢測為陽性，稱為真陽性
- (b) 不帶原者卻被檢測為陽性，稱為偽陽性
- (c) 帶原者卻被檢測為陰性，稱為偽陰性
- (d) 不帶原者確實檢測為陰性，稱為真陰性

透過上述條件，我們可以繪製以下文氏圖



同樣地，以樹狀圖來看，可以看做組成陽性中，源自於帶原者的部分貢獻了多少。



根據貝氏定理：

$$\begin{aligned}
 P(\text{帶原}|\text{陽性}) &= \frac{P(\text{帶原})P(\text{陽性}|\text{帶原})}{P(\text{陽性})} \\
 &= \frac{P(\text{帶原})P(\text{陽性}|\text{帶原})}{P(\text{帶原})P(\text{陽性}|\text{帶原}) + P(\text{不帶原})P(\text{陽性}|\text{不帶原})}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{P(\text{帶原}) P(\text{陽性}|\text{帶原})}{P(\text{帶原}) P(\text{真陽}) + P(\text{不帶原}) P(\text{偽陽})}$$

$$= \frac{0.02 \times 0.8}{0.02 \times 0.8 + 0.98 \times 0.2} = \frac{4}{53} \cong 0.075$$

由此可見，小芬確實帶原的機率約只有 7.5%

(2) 情境回顧

回到我們一開始談到快篩試劑的問題：

廠牌	方法	陽性一致率
羅氏 家用自我檢測套組	抗原	82%
盧西拉 家用確可易檢測試劑	核酸	90%
萊析樂 家用檢測組	核酸	90%

食藥署核准3居家快篩試劑 準確度8成以上

台南市 31-33 線上學習 停課不停學 請上「科普新視界」YouTube

所謂的「陽性一致率」就是指帶原者當中，快篩試劑檢測出為陽性的機率，即「真陽率」。新聞上的三種試劑陽性一致率都達到 8 成以上，如果用快篩試劑測出陽性，代表有至少 8 成的機率帶原嗎？

【例題練習】

假設某地區帶原者比例為 30%，採用羅氏快篩試劑，已知快篩試劑的偽陽率為 15%，如果用快篩試劑測出陽性，有多少機率真的帶原？

【預期學生回答】

算出答案約為 70.09 %

【教師提問】

為何陽性一致率達 8 成以上，不代表用快篩試劑測出陽性，有至少 8 成的機率帶原？

【預期學生回答】

因為貝氏定理的算出來不是。

因為要考慮帶原者占的比例。

由貝氏定理可以發現，帶原者占全體的比率，會影響到此機率的結果，因此，陽性一致率僅供理想狀態下的參考，實際上還需考慮現實中的帶原比例。

能對媒體資訊保持合理的批判性思維，並體會媒體識讀的重要性

紙筆練習

口頭評量

	【媒體素養】 從這個例子可以知道，媒體中的資訊不一定是那麼地直觀正確，需要同學們進一步考量真實的情況，才能套用於現實生活中。 另外，新聞中提到的「準確度」又是另外一個更廣泛的概念，其中包含貝氏定理的活用，有興趣的同學可參考： https://pansci.asia/archives/184694 (3) 課程回顧 我們一起來回顧今天學到什麼： (a) 貝氏定理：事件在分割情形下的機率關係 $P(A_1 B) = \frac{P(A_1)P(B A_1)}{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)} \text{ 或}$ $P(A_k B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B A_k)}{P(A_1)P(B A_1) + \cdots + P(A_n)P(B A_n)}$ (b) 疫情相關媒體識讀 「陽性一致率」： 帶原者中，快篩試劑檢測出為陽性的機率。 由貝氏定理，用快篩試劑測出陽性，需考慮帶原者占全體的比例，才能正確計算出確實帶原的機率。			
--	--	--	--	--

肆、教學評量

單元教學目標	評量方式	備註
認識並理解貝氏定理，並能以文氏圖或樹狀圖解決相關問題	口頭評量、課本例題、紙筆練習	
覺察貝氏定理在生活中的應用，能以貝氏定理概念對數據作合理的解讀與分析	口頭評量、課本例題	
能對媒體資訊保持合理的批判性思維，並體會媒體識讀的重要性	口頭評量	

伍、附錄

一、課堂學習單

貝氏定理 課程學習單

班級：_____ 姓名：_____ 座號：_____

● 貝氏定理

例題 4

某工廠有甲、乙兩臺機器，其產量分別占總產量的 60 % 與 40 %。根據過去經驗知道甲機器產品中的 4 %，乙機器產品中的 3 % 為劣品。今任取一產品，且每個產品被取出的機會相同，則取出的產品為劣品的機率為何？

【問題】

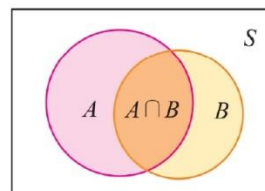
任意選一項劣品，這項劣品來自於甲機器生產的機率為何？

複習：條件機率

假設 A, B 為樣本空間中的兩事件。

在 A 事件發生的情況下， B 事件所發生的機率，記為 $P(A|B)$

此機率的計算方式為 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$



假設工廠所有生產的事件為樣本空間 S

甲機器生產的事件為 A_1 ，乙機器稱產的事件為 A_2

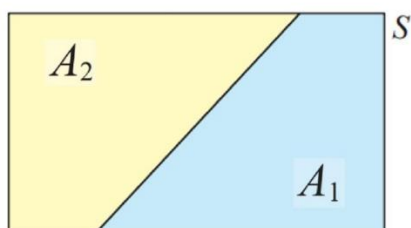
工廠產品中屬於劣品的事件為 B

任意選一項劣品，來自於甲機器生產的機率，即： $P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$

$$\Rightarrow P(A_1 \cap B) = \underline{\hspace{2cm}}$$

■ 事件的分割

令樣本空間為 S ，將 S 分為兩個事件 A_1 和 A_2 ，滿足以下條件：



1. 兩個事件彼此不相交
2. 兩個事件合起來，就是全部的樣本空間

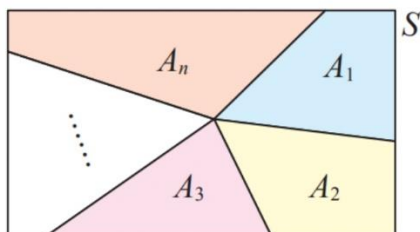
則集合 $\{A_1, A_2\}$ 稱為樣本空間為 S 的一組 _____。

例題 4：工廠所有生產的事件為樣本空間 S ，甲機器生產的事件為 A_1 ，乙機器為 A_2

1. 兩事件是否彼此不相交？ _____（填是或否）
2. 兩個事件合起來，是否為全部的樣本空間？ _____（填是或否）

所以 $\{A_1, A_2\}$ 為樣本空間為 S 的一組 _____

多個事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 滿足以下條件：



1. 任意兩個事件彼此不相交
2. 所有事件合起來，就是全部的樣本空間

則集合 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 亦稱為樣本空間為 S 的一組分割

■ 貝氏定理的推導

例題 4

求任意選一項劣品，來自於甲機器生產的機率 $P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$

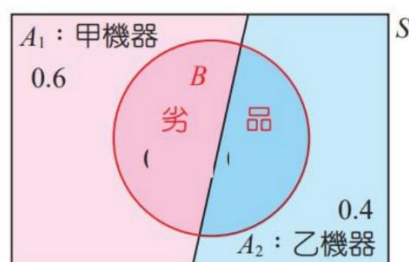
[已知條件]

甲機器生產的比例 60 % $\Rightarrow P(A_1) = \underline{\hspace{2cm}}$

乙機器生產的比例 40 % $\Rightarrow P(A_2) = \underline{\hspace{2cm}}$

甲機器生產劣品的的機率 = $P(\underline{\hspace{2cm}}) = 0.04$

乙機器生產劣品的的機率 = $P(\underline{\hspace{2cm}}) = 0.03$



(解)

分子： $P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A_1 \cap B) = \underline{\hspace{2cm}}$

分母： $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) = \underline{\hspace{2cm}}$

故 $P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\underline{\hspace{2cm}}$

【貝氏定理】

令樣本空間為 S ， $\{A_1, A_2\}$ 為樣本空間為 S 的一組分割， B 為 S 當中的事件

$$\text{則條件機率 } P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)} = \frac{P(A_1) P(B|A_1)}{P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2)}$$

考慮多事件的分割 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$

$$\begin{aligned} \text{則條件機率 } P(A_k|B) &= \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)} \\ &= \frac{P(A_k) P(B|A_k)}{P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2) + \dots + P(A_n) P(B|A_n)} \end{aligned}$$

● 翰林版例題 6

例題 6

展示櫃內有甲、乙、丙三廠牌的智慧型手機，其中甲占總量 20%，乙占 30%，丙占 50%。而甲、乙、丙三廠牌的待機時間超過 100 個小時的機率分別為 0.7、0.4、0.3。試問：

- (1) 若隨手挑一支手機，這支手機的待機時間超過 100 個小時的機率為何？
- (2) 若挑選的手機其待機時間超過 100 個小時，則此手機為甲廠牌的機率為何？

(解)

● 翰林版例題 7

例題 7

已知某種快篩試劑對某病毒的檢驗，“偽陰率”為 20 %（即帶原者做檢驗有 20 % 的機會呈陰性反應，其他呈陽性反應），而“偽陽率”亦為 20 %（即未帶原者做檢驗有 20 % 的機會呈陽性反應，其他呈陰性反應）。現推估有 2 % 的民眾為此病毒帶原者，若小芬以此試劑檢驗結果呈陽性反應，試求她確實帶原的機率為何？

是否帶原 檢測結果	帶原	不帶原
陽性	（帶原者確實檢測為陽性）	（不帶原者卻被檢測為陽性）
陰性	（帶原者卻被檢測為陰性）	（不帶原者確實檢測為陰性）

（解）

陸、參考資料

- 一、十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校-數學領域
- 二、翰林出版事業股份有限公司：高中數學課本第四冊 A
- 三、南一書局企業股份有限公司：高中數學課本第四冊 A
- 四、泰宇出版股份有限公司：高中數學課本第四冊 A
- 五、台視新聞 TTV NEWS (2021 年 6 月 13 日)。食藥署核准 3 居家快篩試劑準確度 8 成以上。

<https://www.youtube.com/watch?v=OdwbFhe7QDc>

- 六、林澤民 (2020 年 4 月 28 日)。醫療檢測的準確度：「偽陰性」、「偽陽性」到底是什麼意思？如何計算準確度？PanSci 泛科學。

<https://pansci.asia/archives/184694>