

【附件 4】

111 學年度數學教學演示競賽活動

比賽（教案）設計格式範例

壹、設計理念

以生活中的圓切線引入課程，希望讓學生觀察自己生活周遭的數學，感受到數學無所不在，藉此破除大多數學生學習數學僅為考試的想法。連結國中三年級學過的圓切線性質，配合情境問題點出「求特定圓切線方程式」的學習需求及意義，利用實際的「環境問題」作為情境，除了增加學生對環境的關注及認識，也讓學生思索情境問題以及辨認問題中要求出的目標；考慮到學生的程度差異性，在教學上提供不同的解題想法給學生選擇，對於程度好進度超前的學生請他們上黑板做練習題的示範，希望讓學生們都能理解整個解題的脈絡及背後的想法，最終回到課程設定的環境問題解出答案，以此檢驗學生在這堂課所學的概念以及培養學生運用數學解決情境中的問題。

貳、教學分析

一、教材分析

對 108 課綱各版本高一圓的切線課本內容作分析，整理如下表：

版本	翰林	龍騰	泰宇	南一
引入主題	以文字敘述複習國中所學(點與圓位置關係影響過該點的圓切線數量)。	以圖示將圓的切線型態分類進行討論，複習國中所學(特定斜率、點與圓位置關係影響的圓切線數量及相關圓切線性質)。	連結生活中的圓切線，以漫畫形式提問引導，藉由練習題複習國中所學(特定斜率、點與圓位置關係影響的圓切線數量)。	以表格、圖示方式複習國中所學(點與圓位置關係影響過該點的圓切線數量及相關圓切線性質)
概念一 過圓上點求切線方程式	連結國中兩線垂直斜率相乘得-1性質提供一解法，以例題說明。	運用先前引入的圓切線性質，提供一種解法以例題說明。	提供一種解法以三個例題說明，包含水平切線、鉛直切線、其他切線。	文字敘述思考方法，提供一種解法以例題說明。

概念二 特定斜率求切線方程式	提供一種解法以例題說明。	運用先前引入的圓切線性質，提供一種解法以例題說明。	配合先前練習題用漫畫提示，提供一種解法以例題說明。	無 (猜測可能挪到別的章節講了)
概念三 過圓外點求切線方程式	提供兩種不同的解法給學生做參考，使學生較不易被侷限。 另外以文字敘述討論切線含鉛直線時的解法。	運用先前引入的圓切線性質，提供一種解法以例題說明 多加一例題來說明切線含鉛直線時的解法。	提供一種解法以例題說明。 多加一例題來說明切線含鉛直線時的解法並以文字探討含水平線時做法。	提供一種解法並直接以切線含鉛直線的例題做說明。
例題安排	1. 過圓上一點之切線方程式 2. 過圓外一點之切線方程式(提供兩種解法) 3. 特定斜率之切線方程式 4. 已知圓與直線相交狀況，討論方程式可能範圍	1. 特定斜率之切線方程式 2. 過圓外一點之切線方程式 3. 過圓上一點之切線方程式 4. 情境應用題(過圓外一點之切線方程式)	1. 特定斜率之切線方程式 2. 過圓上一點之切線方程式 3. 過圓外一點之切線方程式	1. 過圓上一點之切線方程式 2. 過圓外一點之切線方程式及該切線段長(例題僅為有一切線垂直的) 3. 情境應用題(過圓外一點之切線方程式)

各版本優點	在例題方面有較多元的解題方法與說明。 最後的例題應用了[圓與直線]整個單元內容，幫助學生做整合。	以情境應用題放置結尾，呼應到本章[圓與直線]開頭引入的生活情境應用。	概念的引入、介紹較豐富詳細，配合漫畫插圖增加對學生的吸引力。 例題多元，涵蓋多種可能，讓學生能清楚比較其差異。	相較於其他版本多探討了切線段長，可能想多連結國中所學。 以情境應用題放置結尾，呼應本章[圓與直線]開頭引入的生活情境。
-------	---	------------------------------------	--	--

二、學生分析

(一)認知層面：

在國中三年級[點、線、圓]章節學生已學過圓切線性質、點與圓位置關係判斷等，但需要幫學生拉回印象；在高中已學完直線方程式、圓方程式、直線與圓前半章節，會假設直線方程式，會利用點到直線距離公式求距離；學生程度中等，在基本的多項式運算方面很熟練，大致上也都能理解課程內容。

(二)情意層面：

學生在進入本課程之前稍微能了解情境中的數學意涵，能試著找出情境問題中的關鍵字，將文字轉換成數學；而學生對於數學課進展過程中學習程度為一般，與數學老師互動佳。

三、教學方法分析

(一)直接講述法

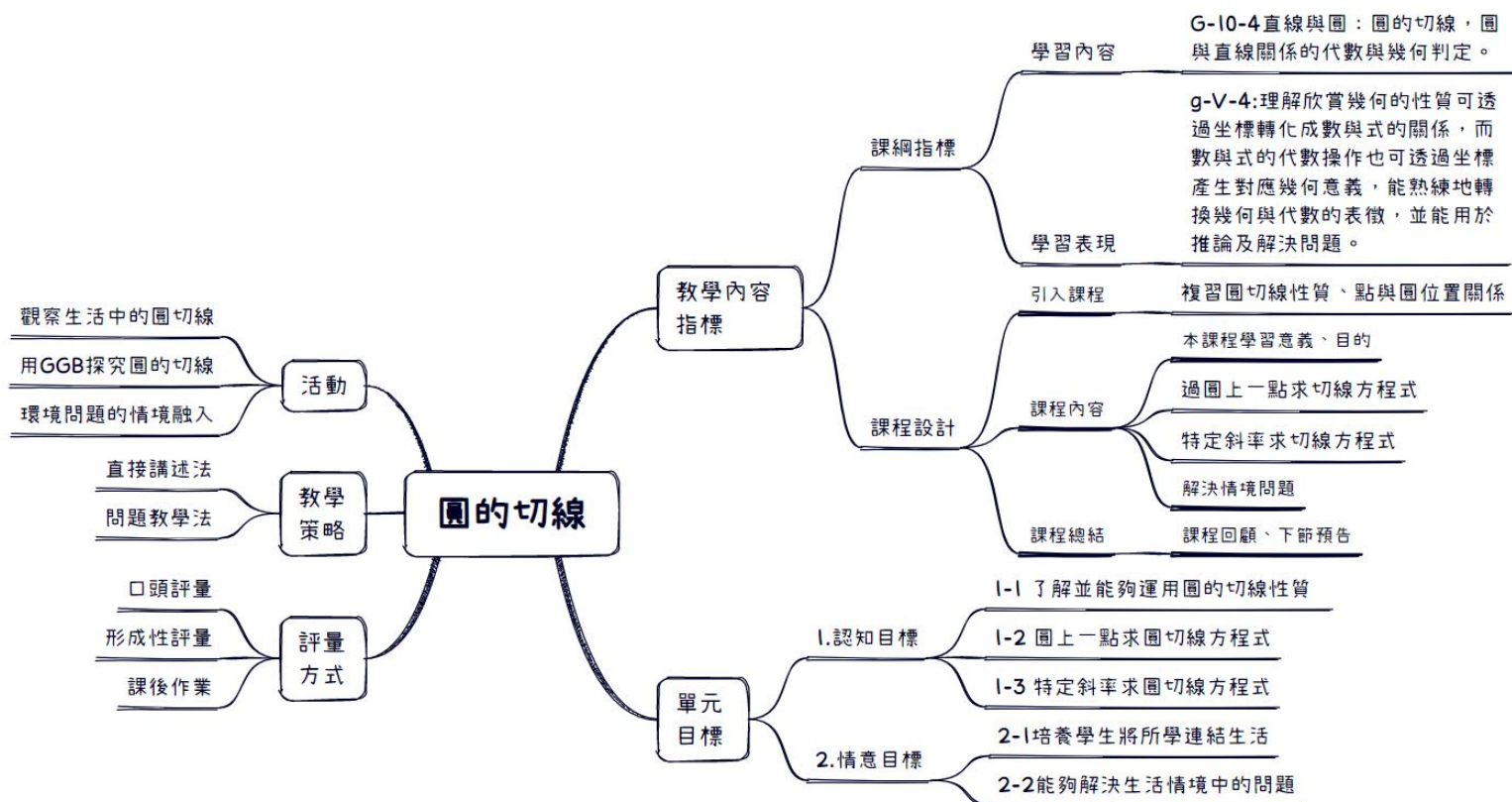
先連結學生的學習經驗以及所學過的數學概念讓學生思考生活中的圓切線，進而複習圓的切線性質並理解求圓的切線方程式時各步驟的意義以及背後的想法。這種方式的優勢在於老師易於掌握教學進度，並且將重要的概念傳達給學生，能顧及一般班級學生的學習需求。

(二)問題教學法

藉由向學生拋出問題漸漸引導學生進入課程中的核心概念，促使學生主動思考及了解本課程學習目的。待概念學習完畢後透過練習題確認學生對於概念的理解程度，且藉由探究情境問題提升學生的學習應用能力。這種方式的優勢一方面能將學生專注力拉在課堂中，另一方面能確保學生的理解狀況。

四、課程概念架構圖

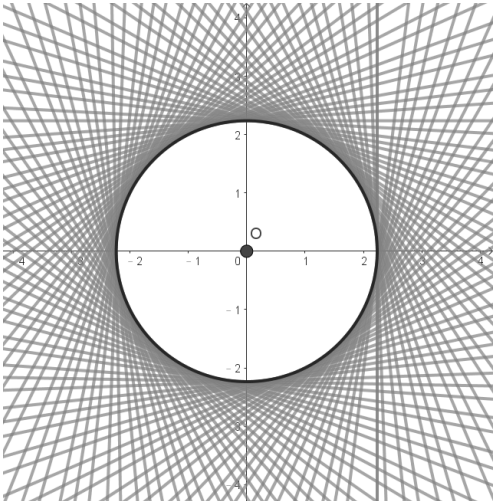
指標/單元名稱/活動/策略/評量方式（可依上列項目自行繪製概念架構圖）



參、教學活動設計

以「直線與圓」中「圓的切線」這一小節做設計，共兩節課此教案為第一節課

單元名稱	圓的切線	適用年級	高中一年級		
課程名稱	生活中-圓的切線	教學時間	50 分鐘		
教材版本	自編教材為主，泰宇版課本為輔。				
教學準備	老師：課堂簡報、學習單、(投影機、投影幕、電腦、簡報筆) 學生：學習單				
能力指標/學習表現	分年細目/學習內容		單元教學目標		
g-V-4:理解並欣賞幾何的性質可以透過坐標而轉化成數與式的關係，而數與式的代數操作也可以透過坐標產生對應的幾何意義，能熟練地轉換幾何與代數的表徵，並能用於推論及解決問題。	G-10-4 直線與圓：圓的切線，圓與直線關係的代數與幾何判定。		1. 認知目標 1-1 了解並能夠運用圓的切線性質 1-2 過圓上一點求圓切線方程式 1-3 特定斜率求圓切線方程式 2. 情意目標 2-1 培養學生將所學連結生活 2-2 能夠解決生活情境中的問題		
單元教學目標	教學內容		時間	評量方式	備註
2-1 培養學生將所學連結生活	一、引入課程： 提問:請同學們回想圓的切線有哪些性質？ 提問:請學生們思考自己認為在生活中發現到的圓的切線？ 老師舉例： 恰接觸海平面的夕陽，若將夕陽看做圓則海平面為圓的切線。 學生分享(可能): 轉雨傘時水滴沿圓的切線飛出 o 切西瓜時劃開的線是西瓜的切線 x (先不討論對錯)		2 min	口頭 口頭	簡報呈現

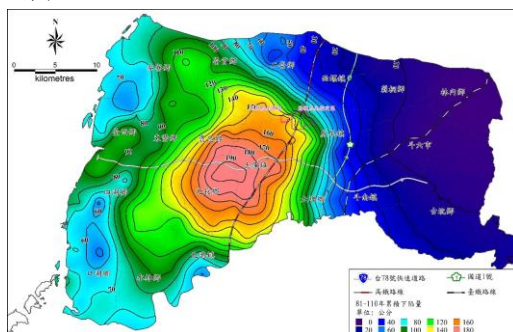
1-1 了解並能夠運用圓的切線性質	提問:真的是這樣嗎?從圓切線的性質來檢查。(請同學上台操作 GGB 幫老師找到圓的切線) 圓切線性質: *切線與圓只交於一點,稱為切點。 *圓心到切點的連線垂直切線。 *圓心到切線的距離等於半徑。 二、課程內容: (一)本課程學習意義、目的 (1)以 GGB 動態呈現一圓的其他切線  提問:一圓有這麼多條圓切線,可以加上哪些條件來指定我們想要的切線。 (2)點在圓上、內、外的圓切線情況 練習題: 已知圓 C: $x^2 + y^2 = 5$, 畫出滿足下列各條件的切線?能畫出幾條? - 過點 T(1, 0) - 過點 P(1, 2) - 過點 Q(3, 0) - 斜率 2	2 min 6 min	GGB 操作 口頭 學習單	增加課堂互動 GGB 呈現 複習國中圓切線性質 GGB 呈現 簡報輔助
--------------------------	--	---------------------------	------------------------------------	---

*藉由練習題幫助學生整理、加深印象

	圓切線數量
過圓內點	0
過圓上點	1
過圓外點	2
特定斜率	2

(3)情境融入：

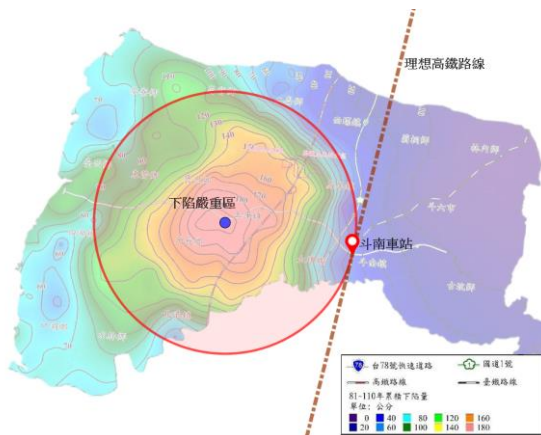
下圖是雲林 81-110 年累積地層下陷量(取自水利署)



從圖中可以看到土庫鎮是近幾年來下陷最嚴重的地區也是高鐵路線有經過的區域，雖然專家表示目前高鐵沒有受到嚴重的影響，但也讓人們開始擔心幾年後可能出現的問題，並積極針對地層下陷問題展開應對措施。

假設未來能夠重建鐵路，若理想高鐵路線為直線需經過斗南車站，且應避開下陷嚴重區：以下陷最嚴重的土庫鎮為中心距離 14 公里內，恰為土庫鎮到斗南車站的距離。

請同學在學習單上畫畫看可能的高鐵路線、並寫下你的觀察。



2-1 培養學生將所學連結生活

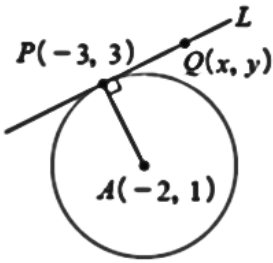
3 min

複習國中圓切線概念

簡報呈現

學習單

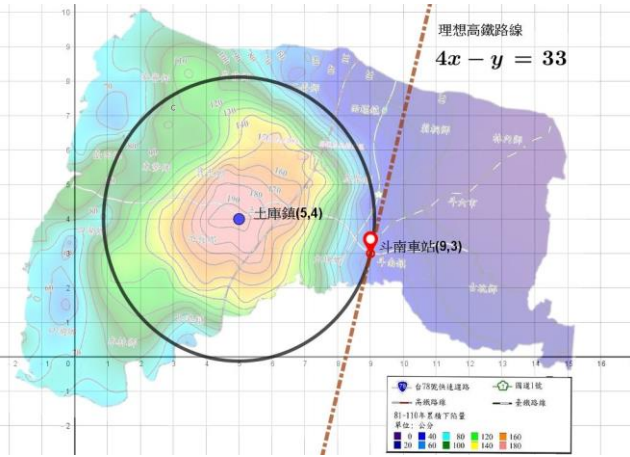
簡報輔助

1-2 過圓上一點求圓切線方程式	提問:如何得知理想高鐵路線方程式? *思考:如何求出圓的切線方程式呢? (二)過圓上一點求切線方程式 (1) 例題: 試求過點 $P(-3,3)$ 且與圓 $C : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$ 相切之切線方程式? Sol: 步驟 1. (判斷點的位置以及畫出圖形) 將 P 點代入圓 C $\Rightarrow (-3+2)^2 + (3-1)^2 = 5$ *等號成立, P 點在圓 C 上。  步驟 2. (解切線方程式) *利用圓心到切點的連線垂直切線, 兩線斜率相乘等於 -1 的概念。 <想法一> (造新點 Q 算出 $\overline{PQ}$ 斜率, 且兩線斜率相乘得 -1) 在切線 L 上任取另一點 $Q(x,y)$ 直線 $\overline{AP}$ 斜率為 $\frac{3-1}{(-3)-2} = -2$	10min	學習單	藉由情境問題點出本課程學習意義 簡報輔助 強調判斷點與圓位置關係及畫出圖形的重要性 與前面圓的切線性質做連結 以相同概念示範兩種想法給學生選擇
-------------------------	---	--------------	------------	--

	直線$\overline{PQ}$斜率為 $\frac{y-3}{x-(-3)}$ 由$\overline{AP} \perp \overline{PQ}$兩直線斜率乘積為 -1，得 $(-2) \times \frac{y-3}{x-(-3)} = -1$ 整理得 $x-2y+9=0$，即為過P點之切線方程式。 <想法二> (先解得切線L斜率，再用點斜式求方程式) 直線$\overline{AP}$斜率為 $\frac{3-1}{(-3)-2} = -2$ 設過點 P 的切線斜率為 m，則 $m \times (-2) = -1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$ 由點斜式得切線方程式為 $y-3 = \frac{1}{2}(x+3)$ 整理得 $x-2y+9=0$，即為過 P 點之切線方程式。			與直線方程式單元 做連結
1-2 過圓上一點求圓切線方程式	(2)練習題: 試求過點 $P(-1, 4)$ 且與圓 $C : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 相切之切線方程式? Sol: 步驟 1. (判斷點的位置以及畫出圖形) 將 P 點代入圓 C $\Rightarrow (-1+1)^2 + (4-2)^2 = 4$ *等號成立，P 點在圓 C 上。	6 min	學習單	簡報輔助 先讓學生自行嘗試 3min 後請三位已經完成的學生上黑板示範解題

1-3 特定斜率求圓切線方程式 1-1 了解並能夠運用圓的切線性質	步驟 2. 可知切線為水平線，故切線方程式為 $y = 4$ (三)特定斜率求切線方程式 (1)例題： 已知圓 $C : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$，求斜率為 3 的切線方程式？ Sol： 步驟 1. (試畫出圖形) 步驟 2. *利用性質圓心到切線的距離等於半徑 ∴ 斜率為 3 ∴ 設切線 L 的方程式為 $y = 3x + k \Rightarrow 3x - y + k = 0$ 圓 C 的圓心為 $M(2, -1)$，半徑 $r = \sqrt{10}$ 圓心到切線的距離： $d(M, L) = \frac{ 3 \cdot 2 - (-1) + k }{\sqrt{(3)^2 + (-1)^2}} = \frac{ k + 7 }{\sqrt{10}}$	5 min	學習單	更加理解 畫出圖形 的重要性 與前面圓 的切線性 質做連結
---	---	-------	-----	---

1-3 特定斜率求圓切線方程式	∴ 圓心到切線的距離等於半徑 $\therefore d = r \Rightarrow \frac{ k+7 }{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$ $\Rightarrow k+7 = \pm 10$ $\Rightarrow k = 3 \text{ or } -17$ 故斜率為 3 的切線有兩條，其方程式為 $y = 3x + 3 \text{ 或 } y = 3x - 17。$ (2)練習題： 已知圓 $C : x^2 + y^2 = 5$，求斜率為 2 的切線方程式？ Sol : 步驟 1. (試畫出圖形) 步驟 2. 設切線 L 的方程式為 $y = 2x + k \Rightarrow 2x - y + k = 0$ 由圓心為 $O(0, 0)$，半徑 $r = \sqrt{5}$，且圓心到切線的距離等於半徑，即 $d(O, L) = r$ 代入點到線距離公式得 $\frac{ 0-0+k }{\sqrt{(2)^2+(-1)^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow k = \pm 5$ 因此斜率為 2 的切線有兩條，其方程式為 $y = 2x + 5 \text{ 或 } y = 2x - 5。$	7 min	學習單	連結前面學習單 1.d 小題 先讓學生自行嘗試 4min 後請三位已經完成的學生上黑板示範解題
------------------------	--	--------------	------------	--

1-2 過圓上一點求圓切線方程式 2-2 能夠解決生活情境中的問題	(四)解決情境問題 (回到雲林地層下陷情境問題) 已知地層下陷嚴重區範圍： $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 17$ 高鐵路線經過斗南車站 (9, 3) 試利用本節課所學，求出高鐵的理想路線方程式。  三、課程總結： 1. 回顧今日所學 (1)求過圓上一點切線方程式的步驟及想法。 (2)求特定斜率圓切線方程式的步驟、想法、要使用到的公式(距離公式)。 2. 預告下次上課內容:圓外一點求圓切線方程式。	7min 2 min	學習單	應用所學解決前面情境問題 4min 後請三位已經完成的學生上黑板示範解題並做檢討
---	--	--------------------------	------------	--

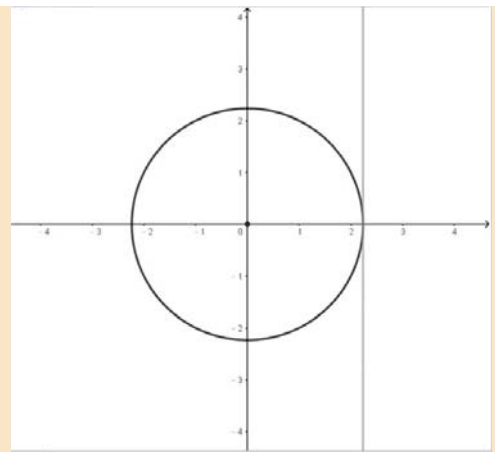
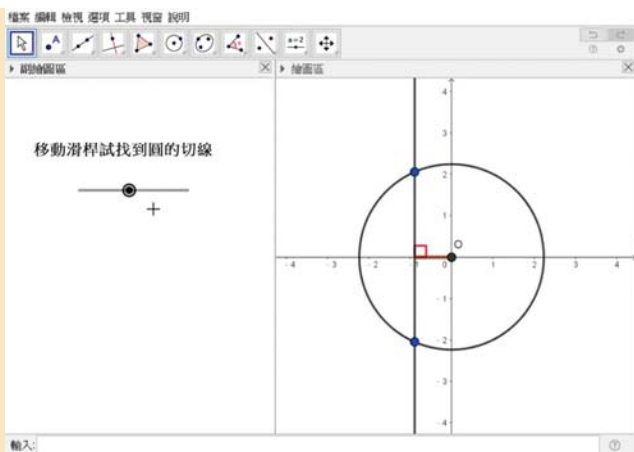
肆、教學評量

單元教學目標	評量方式	備註
1-1 了解並能夠運用圓的切線性質	口頭評量	
1-2 過圓上一點求圓的切線方程式	口頭評量、形成性評量	
1-3 特定斜率求圓的切線方程式	口頭評量、形成性評量	
2-1 培養學生將所學連結生活	口頭評量	
2-2 能夠解決生活情境中的問題	形成性評量	

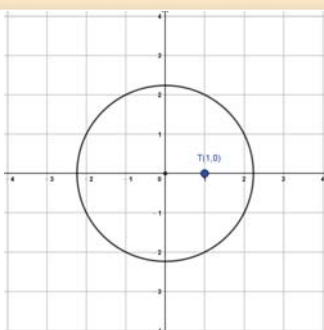
伍、附錄

一、課堂簡報

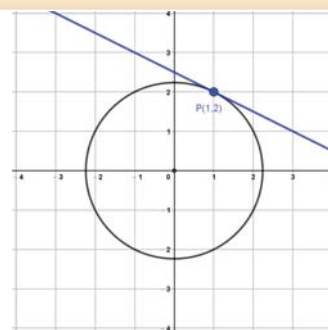
圓的切線



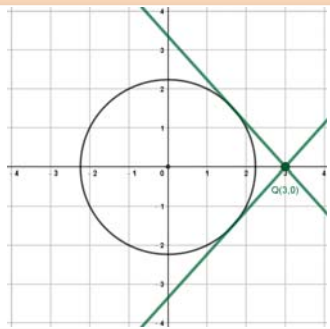
GGB連結: <https://sites.google.com/view/ggb-1-2/%E9%A6%96%E9%A0%81>
(建議以電腦開啟)



1. (a)
試畫出圓切線:
圓 C: $x^2 + y^2 = 5$
過點 T (1,0)

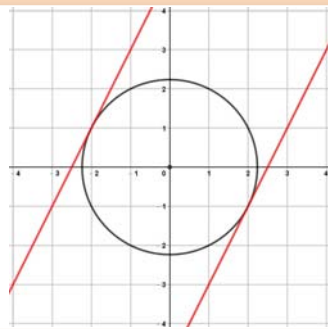


1. (b)
試畫出圓切線:
圓 C: $x^2 + y^2 = 5$
過點 P (1,2)



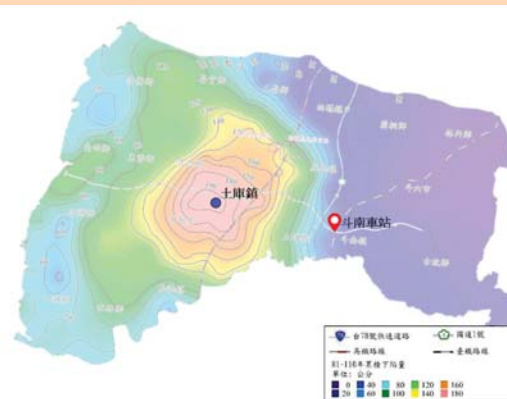
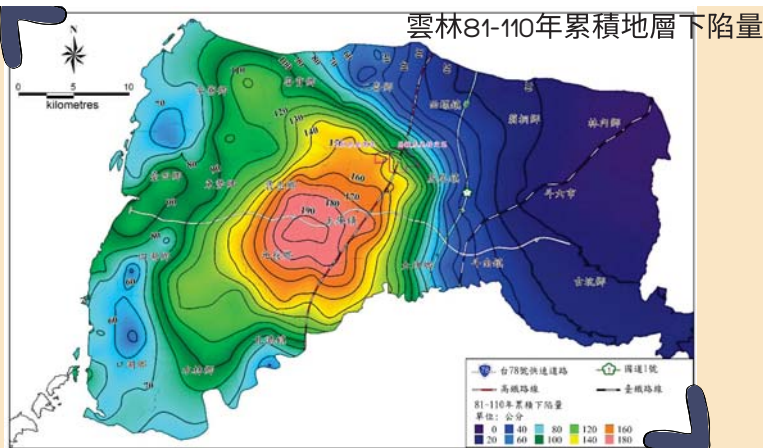
1. (c)

試畫出圓切線:
圓 C: $x^2 + y^2 = 5$
過點 Q (3,0)



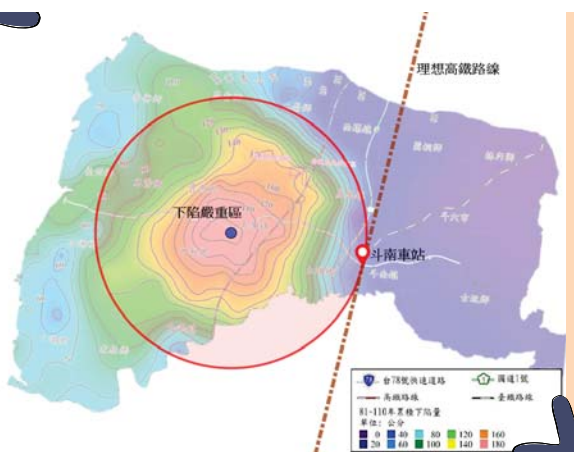
1. (d)

試畫出圓切線:
圓 C: $x^2 + y^2 = 5$
斜率2



2.

假設未來能夠重建鐵路，若理想高鐵路線為直線需經過斗南車站，且應避開下陷嚴重區：以下陷最嚴重的土庫鎮為中心距離14公里內，恰為土庫鎮到斗南車站的距離。



3.(1)

試求過點 $P(-3,3)$ 且與圓 $C: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$ 相切之切線方程式？

3.(2)

試求過點 $P(-1, 4)$ 且與圓 $C : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ 相切之切線方程式？

4.(1)

已知圓 $C : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$ ，求斜率為 3 的切線方程式？

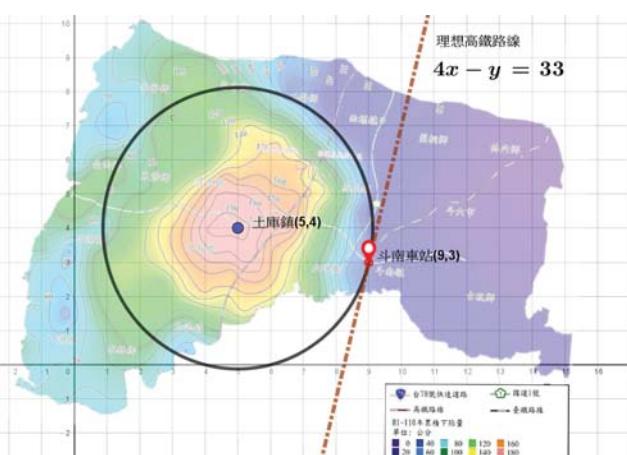
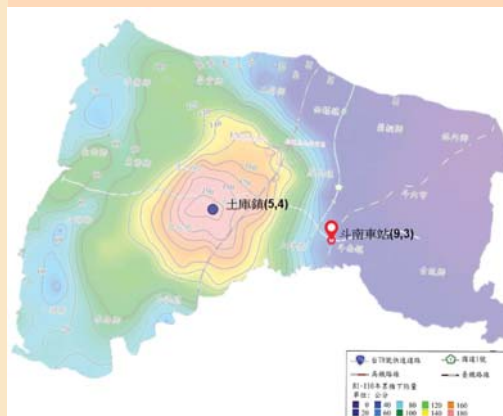
4.(2)

已知圓 $C : x^2 + y^2 = 5$ ，求斜率為 2 的切線方程式？

5.

已知地層下陷嚴重區範圍：
 $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 17$
斗南車站 $(9, 3)$

試利用本節課所學，求出
理想高鐵路線方程式。



課程回顧

學習單

班級：_____座號：_____姓名：_____

1. 已知圓 $C : x^2 + y^2 = 5$ 畫出滿足下列各條件的切線？

a. 過點 $T(1, 0)$

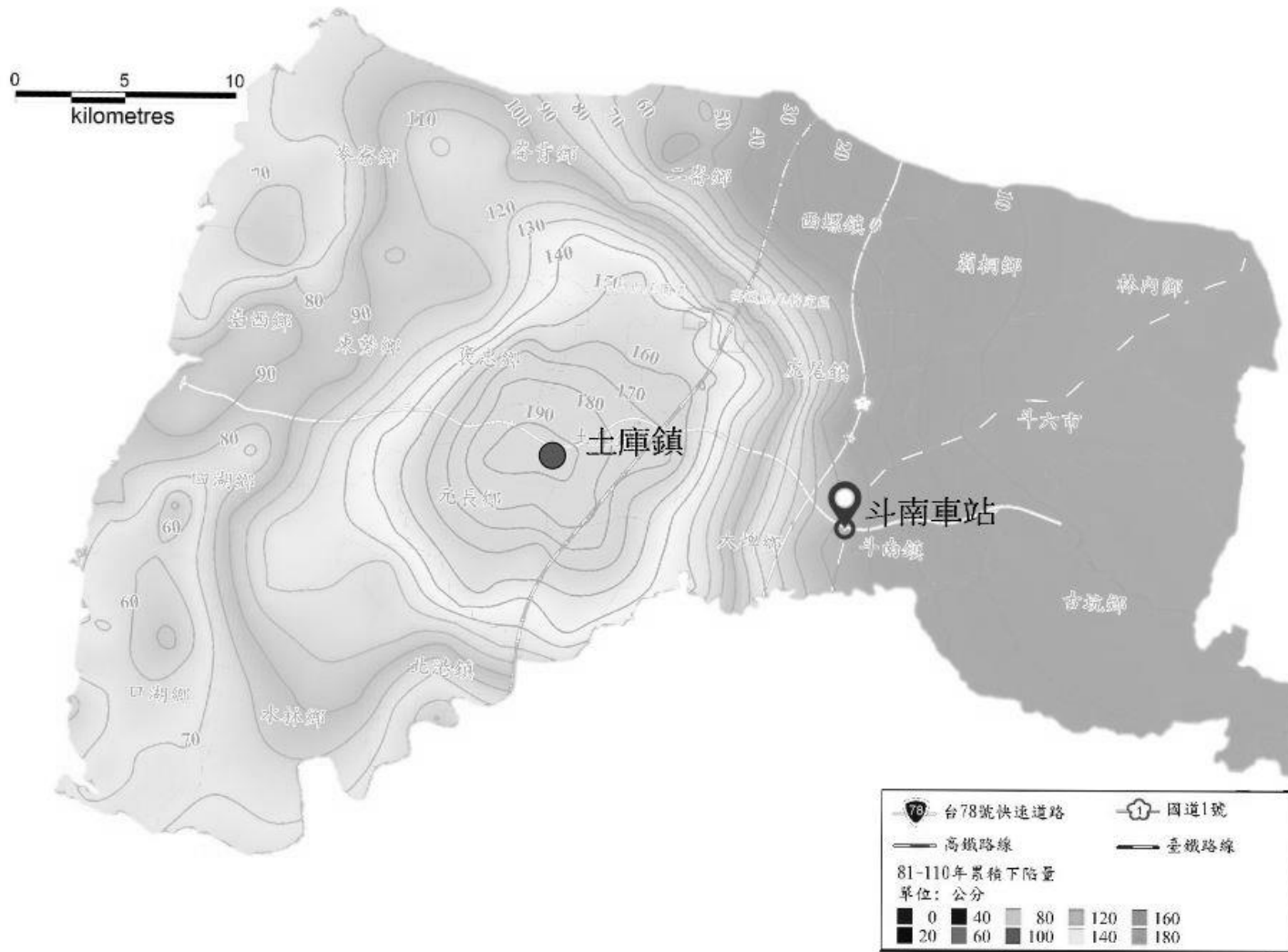
b. 過點 $P(1, 2)$

c. 過點 $Q(3, 0)$

d. 斜率 2

2.

假設未來能夠重建鐵路，若理想高鐵路線為直線需經過斗南車站，且應避開下陷嚴重區:以下陷最嚴重的土庫鎮為中心距離14公里內，恰為土庫鎮到斗南車站的距離。試畫出理想高鐵路線於下圖



觀察與發現：_____

3.

(1) 例題：

試求過點 $P(-3,3)$ 且與圓 $C : (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$
相切之切線方程式？

(2) 練習題：

試求過點 $P(-1,4)$ 且與圓 $C : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$
相切之切線方程式？

4.

(1) 例題：

已知圓 $C : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$ ，求斜率為 3 的切線方程式？

(2) 練習題：

已知圓 $C : x^2 + y^2 = 5$ ，求斜率為 2 的切線方程式？

5.

已知地層下陷嚴重區範圍： $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 17$

高鐵路線經過斗南車站 (9,3)

試利用本節課所學，求出高鐵的理想路線方程式。

陸、參考資料

1. 十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校-數學領域
2. 水利署-地層下陷監測資訊整合服務系統
3. 翰林出版事業股份有限公司。高中數學課本第一冊。
4. 龍騰文化事業股份有限公司。高中數學課本第一冊
5. 南一書局企業股份有限公司。高中數學課本第一冊。
6. 泰宇出版股份有限公司。高中數學課本第一冊。