

112 學年度數學教學演示競賽活動 比賽（教案）設計格式範例

壹、設計理念

以直接引入的方式切入課程重點，藉由與上一小節二次函數圖形的連結來引導學生思考，希望學生將新概念與舊有經驗做整合。除了透過基礎的描點法讓學生先行思考圖形的長相外，也妥善運用 GGB 數學軟體以呈現精準圖形，透過提問的方式引導學生觀察認識圖形並分別探討三次函數中改變各係數對圖形的影響，直接觀察圖形變化使學生能夠加深函數與其圖形的對應連結；考慮到學生的程度差異性，在教學上提供不同層面的想法給學生，對於初次接觸的 $f(x) = ax^3 + px$ 圖形長相，先從直觀的圖形層面做討論，分解成學生熟悉的 $y = ax^3$ 以及 $y = px$ 圖形做觀察討論，再以數學層面討論 $f(x) = ax^3 + px$ 圖形特徵的意義，使學生能夠理解三次函數圖形特徵背後的數學原理；最後紀錄其圖形特徵於學習單進行統整與比較，透過學習單初步檢驗學生的學習成效，對於程度好的學生請他們上黑板做練習題的示範，希望讓學生們都能理解整個解題的脈絡及背後的想法。

貳、教學分析

一、教材分析

1. 涉及的 108 課綱指標

學習內容：

F-10-2 三次函數的圖形特徵：三次函數圖形的對稱性，圖形的大域特徵由最高次項決定，而局部則近似一條線。（認識一般三次函數皆為 $y=ax^3+px$ 之平移；用 $(x-h)$ 的多項式，探討函數圖形在 $x=h$ 附近所近似的一條直線。）

學習表現：

f-V-2 認識多項式函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以多項式函數為數學模型的關係或現象，並能用以溝通和解決問題。

a-V-1 理解多項式、分式與根式對應實數之運算規則，理解指數、對數的運算規則，並能用於數學推論。

g-V-5 理解並欣賞坐標系統可為幾何問題提供簡潔的算法，而坐標的平移與伸縮可以簡化代數問題，能熟練前述操作，並用以推論及解決問題。

核心素養：

A2 系統思考與解決問題：數S-U-A2 具備數學模型的基本工具，以數學模型解決典型的現實問題。了解數學在觀察歸納之後還須演繹證明的思維特徵及其價值。

2. 學習本單元需要的先備知識

A-10-2多項式之除法原理：因式定理與餘式定理，多項式除以 $(x-a)$ 之運算，並將其表為 $(x-a)$ 之形式的多項式。

F-10-1一次與二次函數：從方程式到 $f(x)$ 的形式轉換，一次函數圖形與 $y=mx$ 圖形的關係，數線上的分點公式與一次函數求值。用配方將二次函數化為標準式，二次函數圖形與 $y=ax^2$ 圖形的關係，情境中的應用問題。

3. 學習本單元與未來學習的關聯

F-10-2 三次函數的圖形特徵：圖形的大域特徵由最高次項決定，而局部則近似一條線。

F-10-3多項式不等式：解一次二次或已分解之多項式不等式的解區間，連結多項式函數的圖形。

4. 各版本教材比較

版本	翰林	龍騰	南一	泰宇
課程引入	數學史引入： 源於十六世紀義大利數學家間所流行的三次方程式解題比賽，大大推進了數學的進展。	情境問題引入： 飛機起飛是飛行中最危險的時刻，用三次函數部分圖形來模擬飛機起飛的安全路徑。	以點對稱圖形的意義說明直接進入課程重點。	插畫故事引入： 椅背、馬路在設計轉彎的地方也會用到三次函數？
認識函數圖形特徵	先以描點法認識基本的三次單項函數圖形，再提供多種係數搭配下的函數圖形供學生觀察比較。 對圖形特徵的觀察較豐富，學生較能感受到係數對圖形的影響	以描點法作為認識圖形的主要方式，用練習題檢驗學生對於函數與圖形的配對能力。 對圖形特徵的觀察比較少，老師需對圖形的背後意義多做補充	描點法認識基本的三次單項函數圖形，再提供幾個係數搭配下的代表性函數圖形供學生觀察比較。 對圖形特徵的觀察有完整的認識，能夠有效率判斷圖形與函數	描點法認識圖形外，也提供 Desmos 軟體的繪圖步驟以及圖形的呈現結果，並且搭配多元化的練習題型做評量。 讓學生更直接感受到係數的變化對圖形的影響。
三次函數平移、一般式求標準式	用「比較係數法」化簡為標準式。 較不受先備知識所影響，屬於基本數學運算邏輯，對學生不會有太大的學習負擔。	介紹「配方法」推得對稱中心，搭配「比較係數法」化簡為標準式。 較有效率的化簡方式，也訓練學生運有既有條件解決問題的能力。	用「連續綜合除法」化簡為標準式。 除了有效運用前面所學的運算工具，也為下一學習重點三次函數局部特徵做鋪成。	連結二次配方做推廣用「三次配方法」化簡為標準式。 能夠與二次函數化簡標準式做連結，但對學生可能造成較大的學習負擔。

各版本特色	科技融入適當。 強調先觀察後發現， 提供相當多的圖形例 子供學生做比較。 重點概念簡單明確。	生活情境問題 例題前後呼應 課外知識補充 科技融入適當	科技融入適當 表格式的重點整理 題型多元	情境漫畫豐富 科技融入多元 色塊式重點整理 概念延伸豐富
-------	--	--------------------------------------	----------------------------	---------------------------------------

二、學生分析

認知層面：

在本單元前面小節學生學過多項式的運算，能夠處理多項式的四則運算問題，也已經認識二次函數圖形，具備用描點法描繪函數圖形的能力，並理解二次函數圖形平移後的二次函數標準式寫法。學生整體程度中等，在基本的運算方面很熟練，大致上也都能理解課程內容。

情意層面：

在進入本課程之前學生已初步具備感受圖形對稱性的能力，經過 GGB 的呈現能觀察出不同係數對應的圖形特徵，並理解其背後原因。能看到生活中的二次函數圖形，並能運用到日常生活的情境問題。

學習態度：

對於數學課進展過程中部分學生學習態度積極正向，部分學生態度輕鬆而不隨意，整體上與數學老師的互動性佳。

三、教學方法分析

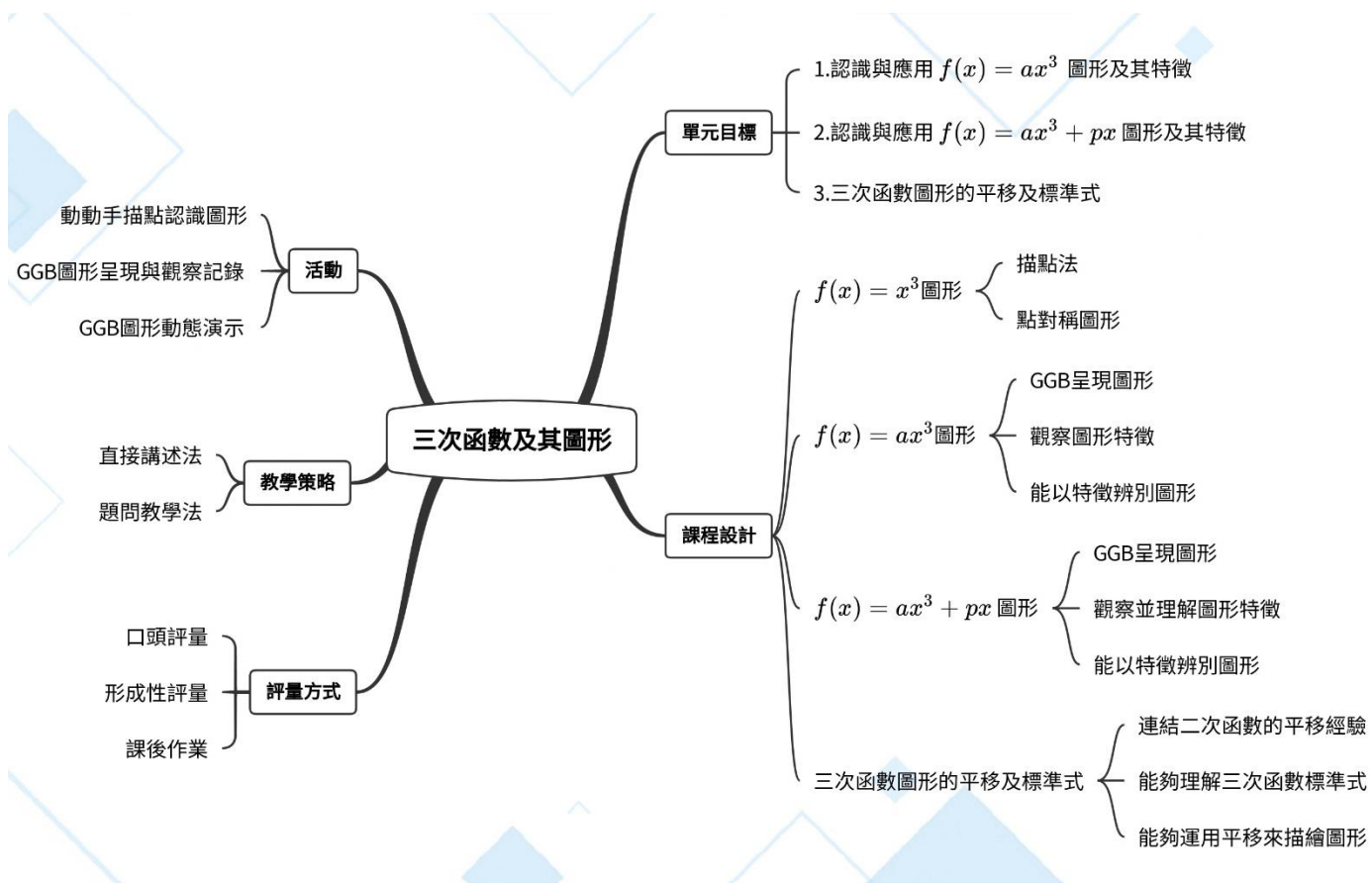
(一)直接講述法

先連結學生的學習經驗、所學過的數學概念讓學生思考三次函數圖形的長相，透過描點法、GGB 呈現其圖形，帶學生觀察其圖形特徵以及講述背後的數學原理。這種方式的優勢在於老師易於掌握教學進度，並且將重要的概念傳達給學生，能顧及一般班級學生的學習需求。

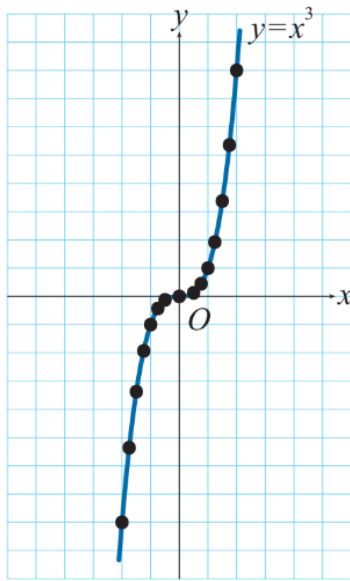
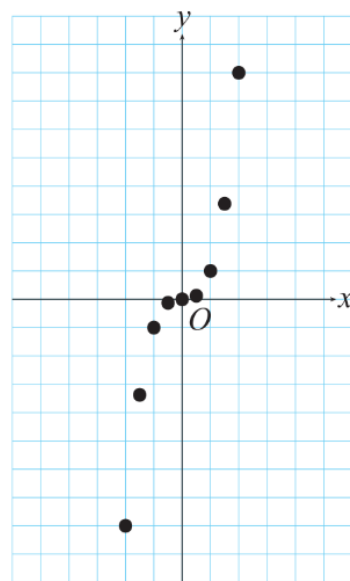
(二)題問教學法

藉由向學生拋出問題漸漸引導學生進入課程中的核心概念，促使學生主動思考及了解圖形的觀察重點。待概念學習完畢後透過練習題確認學生對於圖形特徵的理解程度，且藉由發表答案來訓練學生的邏輯表達能力。這種方式的優勢一方面能將學生專注力拉在課堂中，另一方面能確保學生的理解狀況。

四、課程概念架構圖



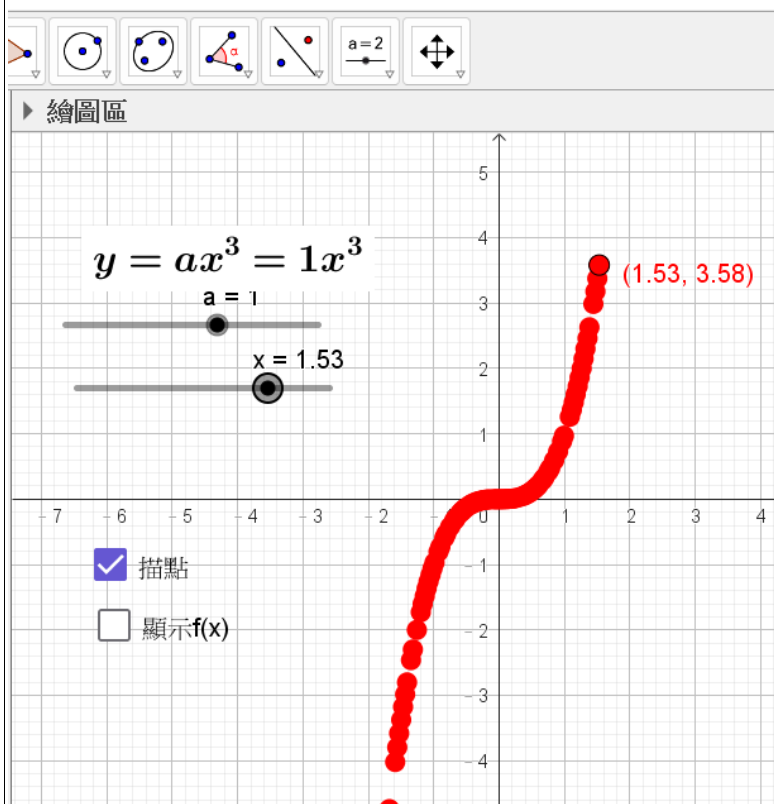
參、教學活動設計

單元名稱	三次函數及其圖形	適用年級	高一上																	
課程名稱	三次函數及其圖形	教學時間	50																	
教材版本	參考泰宇版																			
教學準備	學習單、GGB																			
能力指標/學習表現		分年細目/學習內容		單元教學目標																
f-V-2 認識多項式函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以多項式函數為數學模型的關係或現象，並能用以溝通和解決問題。		F-10-2 三次函數的圖形特徵：三次函數圖形的對稱性，圖形的大域特徵由最高次項決定，而局部則近似一條線。（認識一般三次函數皆為 $y=ax^3+px$ 之平移）		1. 認識與應用 $f(x) = x^3$ 圖形及其特徵 2. 認識與應用 $f(x) = ax^3 + px$ 圖形特徵 3. 三次函數圖形的平移及標準式																
單元教學目標	教學內容			時間	評量方式	備註														
認識 $f(x) = x^3$ 圖形	認識完二次函數圖形後，請同學想想看三次函數圖形可能會長甚麼樣子。 (直接切入課程重點) 三次函數顧名思義 x 的最高次方是三次方，我們先從最簡單的 $f(x) = x^3$ 認識起。 (一) 三次函數 $f(x) = ax^3$ 動動手： 利用描點法，畫出三次函數 $f(x) = x^3$ 圖形。 Sol:			5/5	學習單															
	<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1.5</td><td>-1</td><td>-0.5</td><td>0</td><td>0.5</td><td>1</td><td>1.5</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>-8</td><td>-3.38</td><td>-1</td><td>-0.13</td><td>0</td><td>0.13</td><td>1</td><td>3.38</td><td>8</td></tr></table> 	x	-2				-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	y	-8	-3.38	-1	-0.13	0
x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2											
y	-8	-3.38	-1	-0.13	0	0.13	1	3.38	8											

※引導:我們只有點出 9 個點，為了確定圖形就是這樣連起來，我們進一步用電腦軟體來驗證我們的猜測。

2/7

老師以 GGB 描點功能描出多個點並呈現出 $f(x) = x^3$ 圖形。



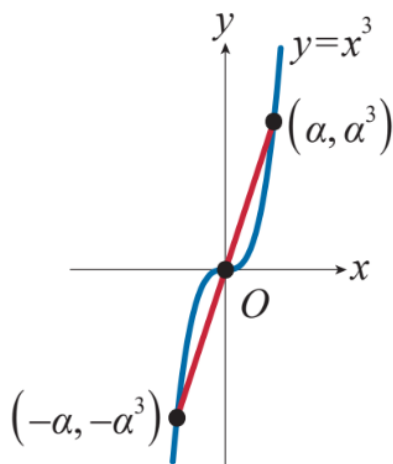
※題問:在上一節中我們知道二次函數圖形存在對稱性質，請同學觀察此三次函數圖形，覺得它是對稱圖形嗎?是的話是對稱於哪裡?

3/10

口頭評量

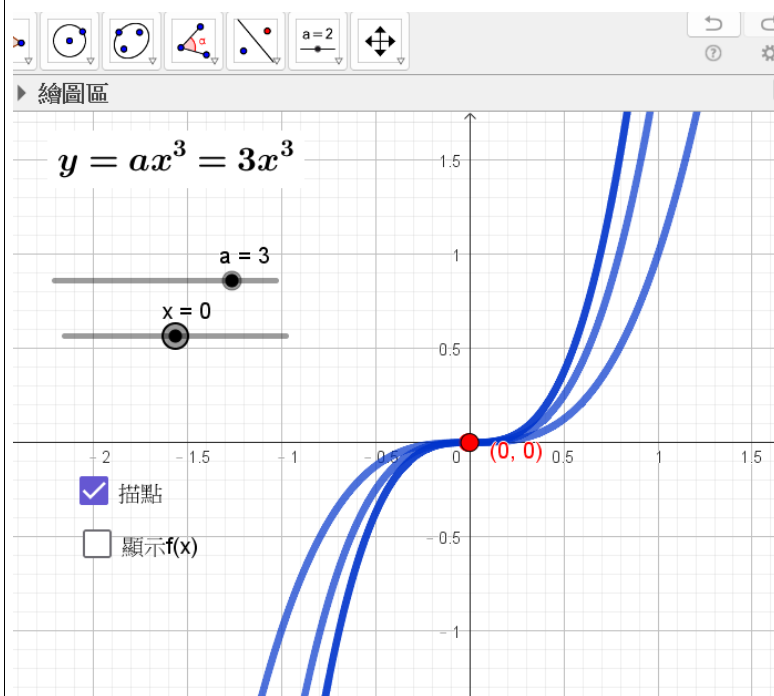
認識 $f(x) = x^3$ 圖形特徵

點出三次函數 $f(x) = x^3$ 的點對稱性質，對稱中心為原點。



認識 $f(x) = x^3$
圖形特徵

老師調動滑竿改變 a 值，請學生觀察 $f(x) = ax^3$ 的圖形變化並做分享。



4/14

口頭評量

應用 $f(x) = ax^3$
圖形特徵

觀察目標：

$a > 0$ ：圖形右上升、點對稱。

$a < 0$ ：圖形右下降、點對稱。

$|a|$ 值越大，爬升下降的越快。

小試身手 1：

將下列空格中填入對應函數圖形之代號。

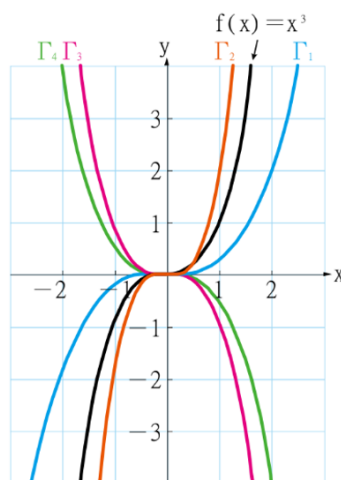
$\Gamma_1 \sim \Gamma_4$ ：

(1) _____： $g(x) = 2x^3$ 。

(2) _____： $h(x) = -x^3$ 。

(3) _____： $p(x) = \frac{1}{4}x^3$ 。

(4) _____： $q(x) = -\frac{1}{2}x^3$ 。



2/16

學習單

認識
 $f(x)$
 $= ax^3 + px$
 圖形特徵

(二) 三次函數 $f(x) = ax^3 + px$

7/23

口頭評量

口頭評量

※提問: 回想曾經學過哪個函數圖形也是點對稱圖形?

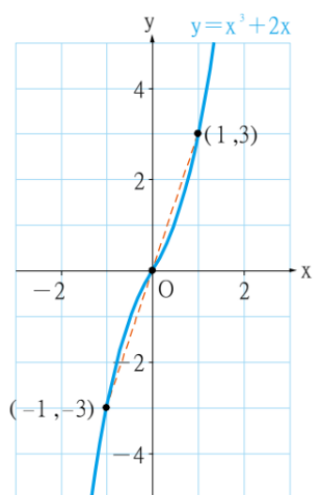
※引導: 既然 $y = ax^3$, $y = px$ 都是點對稱圖形, 那 $f(x) = ax^3 + px$ 也會是點對稱圖形嗎?

對於 $f(x) = ax^3 + px$, ($ap \neq 0$) 的函數圖形, 依 a, p 的正負分成四種情形, 老師用 GGB 以實例畫出圖形並請學生觀察與分享。

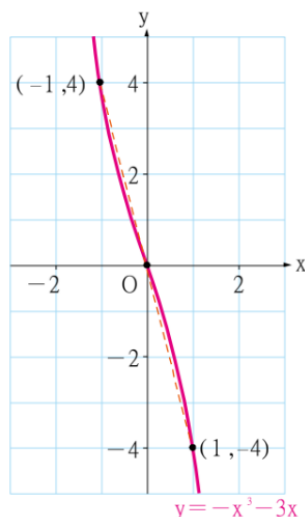
觀察:

a, p 同號:

$a > 0, p > 0$



$a < 0, p < 0$



觀察目標:

$a > 0, p > 0$: 圖形右上升(持續遞增)、點對稱。

$a < 0, p < 0$: 圖形右下降(持續遞減)、點對稱。

認識
 $f(x)$
 $= ax^3 + px$
 圖形特徵

老師在符合 a, p 正負條件下分別呈現多個函數圖形, 請學生觀察其共同特徵, 並記錄於學習單。

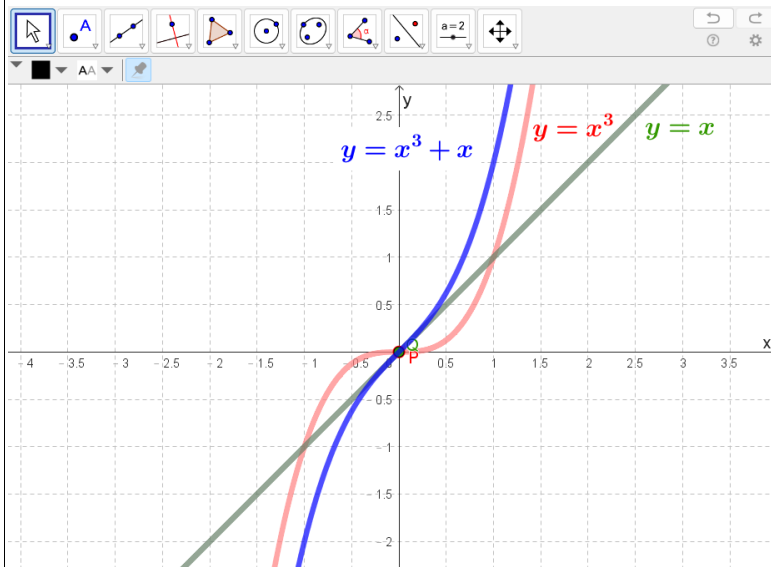
(老師示範學習單第一格, 其餘可請學生上黑板示範)

a, p 同號		a, p 異號	
$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$
			

學習單

認識
 $f(x)$
 $= ax^3 + px$
 圖形特徵

※引導:但為什麼圖形會長這樣呢? 以 $f(x) = x^3 + x$ 圖形來說明, 我們可以把 $f(x)$ 看作是兩個我們認識的函數圖形 $y = x^3$, $y = x$ 相加組合而來, 以下以 GGB 分別呈現。



觀察 $f(x) = x^3 + x$ 圖形:

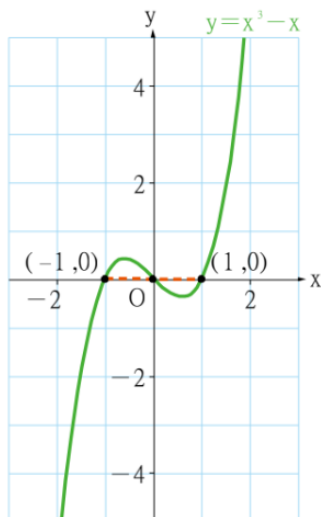
當 $|x|$ 較小, x 在原點附近時圖形與 $y = x$ 相近

當 $|x|$ 較大, x 在遠離原點時圖形向 $y = x^3$ 靠近

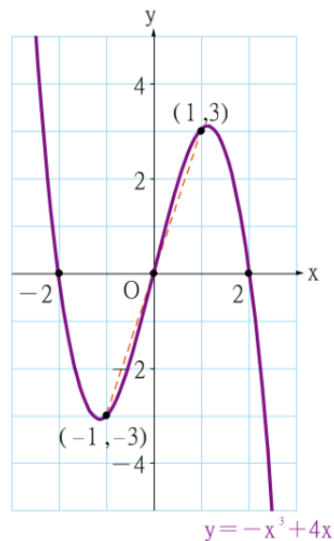
再看若 a, p 異號 會不會有此現象。

a, p 異號:

$a > 0, p < 0$



$a < 0, p > 0$



7/30

認識

$$f(x) = ax^3 + px$$

圖形特徵

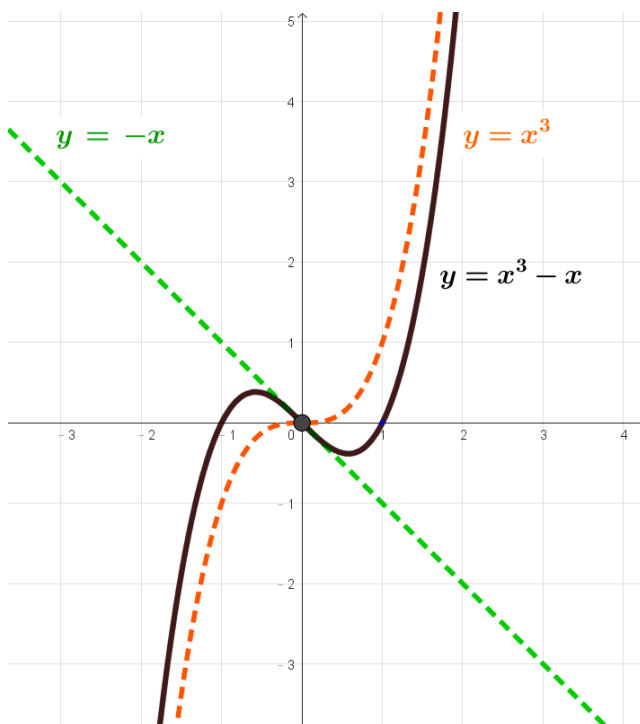
觀察目標：

$a > 0, p < 0$: 中間有凹凸轉折最終右上升、點對稱。

$a < 0, p > 0$: 中間有凹凸轉折最終右下降、點對稱。

老師在符合 a, p 正負條件下分別呈現多個函數圖形，請學生觀察其共同特徵，並記錄於學習單。

※引導：為什麼中間會出現轉折呢？一樣我們用認識的函數圖形 $y = x^3$, $y = -x$ 來思考 $f(x) = x^3 - x$ 函數圖形的長相，以下以 GGB 分別呈現。



認識

$$f(x) = ax^3 + px$$

圖形特徵

觀察 $f(x) = x^3 - x$ 圖形：

當 $|x|$ 較小， x 在原點附近時圖形與 $y = -x$ 相近

當 $|x|$ 較大， x 在遠離原點時圖形向 $y = x^3$ 靠近

我們從數學的角度思考：

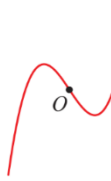
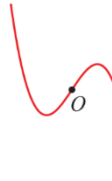
當 $|x|$ 較小，舉個實際例子 $x = 0.1$ 代入 $f(x)$ ，其中 $0.1^3 = 0.001$ 較小，因此不論它的係數 a 如何調整都影響不大，使得圖形主要受到 px 所影響，這時圖形與 $y = -x$ 相近。

同樣的，當 $|x|$ 較大，舉例 $x = 10$ 代入 $f(x)$ ，其中 $10^3 = 1000$ 較大，這時就反過來了，它的係數 a 成為主要的影響，這就是圖形最終向 $y = x^3$ 靠近的原因。

學習單

認識
 $f(x) = ax^3 + px$
 圖形特徵

完成學習單表格如下：

a, p 同號		a, p 異號	
$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$
			

以學習單做整理總結：

(圈選括號內正確選項)

$f(x) = ax^3 + px$ 函數圖形特徵：

1. 過原點 $(0, 0)$ 為對稱中心 → (點對稱/線對稱)
2. $a > 0$ 圖形最終走向右(上升/下降) ,
 $a < 0$ 圖形最終走向右(上升/下降)
3. a, p 同號，圖形(持續上升下降/中間有曲折)
 a, p 異號，圖形(持續上升下降/中間有曲折)

2/32

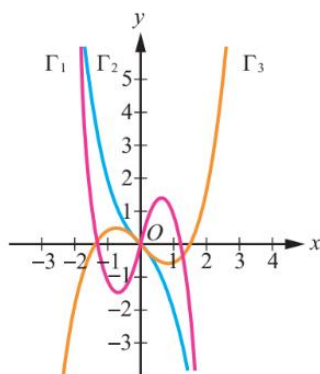
學習單

學習單

應用
 $f(x) = ax^3 + px$
 圖形特徵

小試身手 2：

(連連看) 請將下列函數連到所對應的函數圖形之代號上：



$f(x) = -2x^3 + 3x$ •

• Γ_1

$g(x) = \frac{1}{2}x^3 - x$ •

• Γ_2

$h(x) = -x^3 - x$ •

• Γ_3

2/34

學習單

圖形的平移
以及
三次函數標準
式

(三) 標準式 $f(x) = a(x - h)^3 + p(x - h) + k$

7/41

引導:

我們已經認識了基本的三次函數圖形長相，若現在老師想拉動圖形平移 (h, k) ，此時三次函數經過平移後，多項式該如何改寫。

提問:首先我們先就鉛直平移來思考，請問老師想要將 $f(x) = 2x^3 - 2x$ 圖形向上平移 $(0, 1)$ ，此時應如何改寫多項式?(以 GGB 呈現圖形)

口頭評量

由上一小節二次函數鉛直平移的經驗我們可以運用到三次函數，也就是改寫為 $g(x) = 2x^3 - 2x + 1$ 。

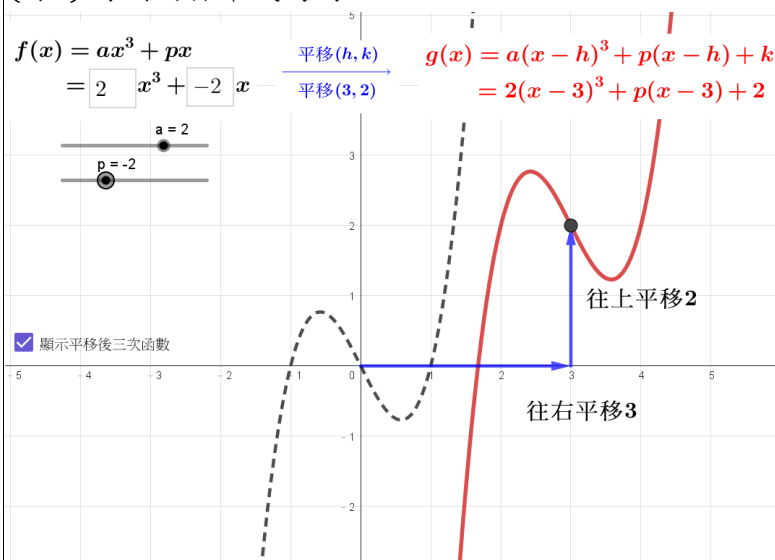
提問:就水平平移來思考，請問老師想要將 $f(x) = 2x^3 - 2x$ 圖形向右平移 $(1, 0)$ ，此時應如何改寫多項式?(以 GGB 呈現圖形)

口頭評量

由上一小節二次函數水平平移的經驗我們可以運用到三次函數，也就是改寫為 $g(x) = 2(x - 1)^3 - 2(x - 1)$ ，可將平移後的對稱點 $(1, 0)$ 帶入檢查發現符合。

請學生嘗試寫寫看三次函數 $f(x) = ax^3 + px$ 平移 (h, k) 得到的標準式為何?

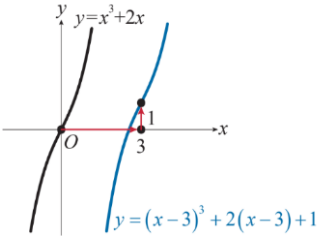
圖形的平移
以及
三次函數標準
式



點出三次函數標準式 $f(x) = a(x - h)^3 + p(x - h) + k$

提問:此時的對稱中心為? (h, k)

口頭評量

圖形的平移 以及 三次函數標準 式	練習題一： 描繪 $f(x) = (x-3)^3 + 2(x-3) + 1$ 的圖形，並求其對稱中心。 提問：能夠描繪出圖形嗎？用什麼方法？請學生分享。 學生可能回答：描點法可以描繪出圖形。 ※引導：既然我們學過平移、知道過原點的三次函數圖形長相，能否將三次函數從某個過原點的三次函數圖形平移來？（以此創造學習需求、點出學習目標） Sol: 由平移的概念知道，函數 $y = (x-3)^3 + 2(x-3) + 1$ 的圖形可由 $y = x^3 + 2x$ 的圖形（見例題2）往右平移3單位，再向上平移1單位得到，如右圖所示，且其對稱中心為點 $(3,1)$。  ※思考：給定任意三次函數都能化簡成標準式嗎？ （為下一節課埋下伏筆） (四)課程回顧 1. 回顧今日所學重點，幫助學生系統性整合。 2. 交待作業 3. 預告下次上課內容： 三次函數一般式化簡標準式、三次函數局部特徵。	5/46	學習單 口頭評量	
		4/50		

肆、教學評量

單元教學目標	評量方式	備註
1. 認識與應用 $f(x) = x^3$ 圖形及其特徵	口頭評量、形成性評量	
2. 認識與應用 $f(x) = ax^3 + px$ 圖形特徵	口頭評量、形成性評量	
3. 三次函數圖形的平移及標準式	口頭評量、形成性評量	

伍、附錄(學習單)

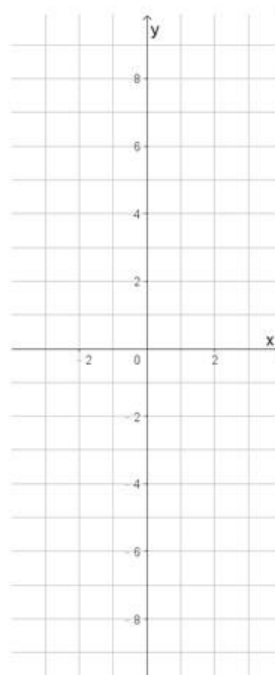
三次函數及其圖形學習單

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

動動手：

利用描點法, 畫出三次函數 $f(x) = x^3$ 圖形。

x	y
-2	
-1.5	
-1	
-0.5	
0	
0.5	
1	
1.5	
2	



小試身手1：

將下列空格中填入對應函數圖形之代號。

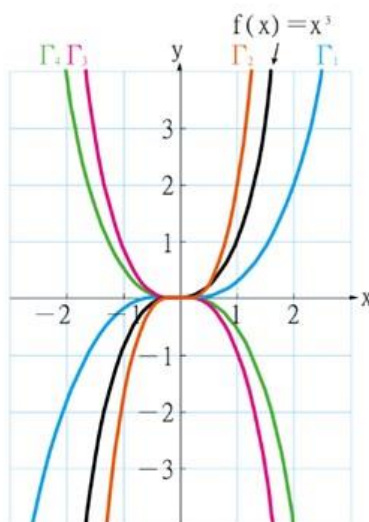
$\Gamma_1 \sim \Gamma_4$ ：

(1) _____ : $g(x) = 2x^3$ 。

(2) _____ : $h(x) = -x^3$ 。

(3) _____ : $p(x) = \frac{1}{4}x^3$ 。

(4) _____ : $q(x) = -\frac{1}{2}x^3$ 。



$f(x) = ax^3 + px$ 圖形特徵 (完成表格)

a, p 同號		a, p 異號	
$a > 0, p > 0$	$a < 0, p < 0$	$a > 0, p < 0$	$a < 0, p > 0$

(圈選括號內正確選項)

$f(x) = ax^3 + px$ 函數圖形特徵:

- (1) 過原點(0,0)為對稱中心 → (點對稱/線對稱)
- (2) $a > 0$ 圖形最終走向右(上升/下降), $a < 0$ 圖形最終走向左(上升/下降)
- (3) a, p 同號, 圖形(持續上升下降/中間有曲折)
 a, p 異號, 圖形(持續上升下降/中間有曲折)

小試身手2:

(連連看)將下列函數連到所對應的函數圖形之代號。

$$f(x) = -2x^3 + 3x$$

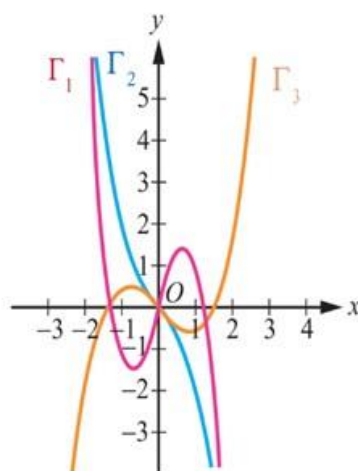
• Γ_1

$$g(x) = \frac{1}{2}x^3 - x$$

• Γ_2

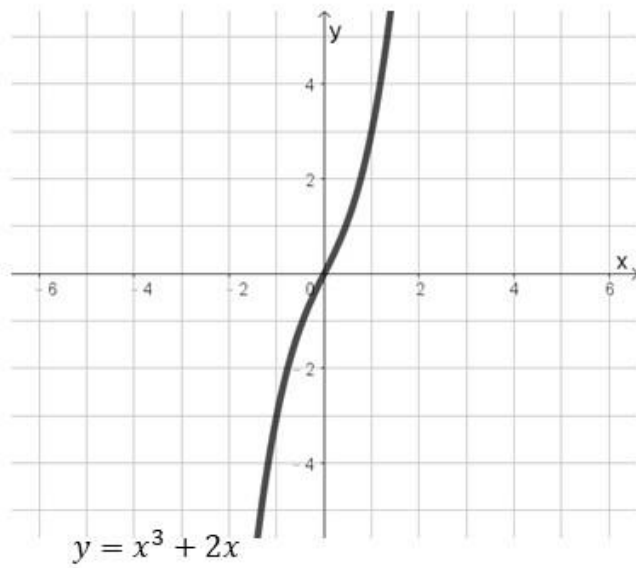
$$h(x) = -x^3 - x$$

• Γ_3



練習題一：

描繪 $f(x) = (x-3)^3 + 2(x-3) + 1$ 的圖形，並求其對稱中心。



陸、參考資料

1. 十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校-數學領域
2. 翰林出版事業股份有限公司。高中數學課本第一冊。
3. 龍騰文化事業股份有限公司。高中數學課本第一冊
4. 南一書局企業股份有限公司。高中數學課本第一冊。
5. 泰宇出版股份有限公司。高中數學課本第一冊。
6. 教育部因材網教育影片。