

壹、設計理念(教材特色與精神)

很多學生在學習二項式定理時，大部分學生都只是記憶公式，卻不太理解它背後的原理。因此，本教案的著重點是讓學生能認識二項定理真正的意義。如果只用傳統的講述法，難以引起學生的學習動機，學生對於新知識的概念，也不會有太深刻的印象。因此，在本節課堂中，會以遊戲化的方式來授課，讓學生去探究二項式定理真正的意義，希望透過這樣的方式，讓學生可以對新的概念有更深刻的印象。本節的二項式定理會使用到一些學生過往學習的知識，考慮到同學可能忘記先備知識的概念。因此，在進入主題前，會先幫學生複習一下學生所需要的先備知識。

貳、教學分析

一、教材分析

課本版本 課程概念	南一	龍騰	翰林
引入主題	從兩項和的平方公式與立方公式切入，並搭配先前所學到的組合來引入主題。	從兩項和的平方公式與立方公式切入，並搭配先前所學到的組合來引入主題。	從兩項和的平方公式與立方公式切入，並搭配先前所學到的重複排列來引入主題。
二項式定理的例題安排	例題 5 利用二項式定理，寫出兩項相減的 6 次的展開式中某項的係數。 例題 6 利用二項式定理，寫出兩項相減的 8 次的展開式中某項的係數與常數項。	例題 6 利用二項式定理，寫出兩項相加的 5 次的展開式。 例題 7 利用二項式定理，寫出兩項相減的 4 次的展開式。 例題 8 討論二項式中未知數次方中不為	例題 6 (1)利用二項式定理，寫出兩項相加的 4 次的展開式。 (2)利用二項式定理，寫出兩項相減的 4 次的展開式。 例題 7 (1)利用二項式定理，寫出兩項相加的 4 次的展

		一次式的展開式，並求出特定項的係數。 例題 9 利用二項式定理，證明含有組合數的恆等式。 例題 10 把二項式定理應用在生活情景。	開式。 (2) 利用二項式定理，找出某項的係數。
--	--	---	--

二、學生分析：

本節授課的對象是高一的學生，班上同學的程度預設為中等。學生已經學了計數原理和排列組合的基本知識，但排列組合是一個很特別的主題。有些學生以往在其他單元的表現都很好，卻在排列組合這個單元出現很多迷思概念；相反，有些學生在以往在其他單元的表現並不是很好，而在組合這單元裡，卻取得不錯的成績。二項式定理的概念是與組合有關的，若學生沒有掌握先備知識，也許難以把二項式定理的概念與前面的先備知識連結在一起。

三、教學方法分析：

這堂課的教學方法主要以「講述教學法」、「遊戲教學法」和「合作學習教學法」授課。單純的講述法，學生並不會對學習產生太大興趣，而且未必能理解二項式定理的背後原理是什麼。搭配遊戲的用意，是希望啟發學生透過探究新知識的重要觀點，考慮到班上的同學程度不一，所以會以小組的形式來進行遊戲，也可以讓程度好的學生，去引導程度較差的學生思考。

（一）講述教學法

「講述教學法」是最常見的一種教學方法，是指老師用口頭形式來教導學生。這種教學方法

優點：

- (1) 可以在短時間內，將組織、整理過的教材教導學生；
- (2) 依據進度、科目、時間和學生程度等因素，來改變講課的內容與時
- (3) 可以訓練學生的聽力，從聲音中去掌握訊息。

缺點：

- (1) 學生的人數太多的話，老師無法了解到每一個學生的學習狀況；
- (2) 容易使學生養成被動、消極的學習態度。

（二）遊戲教學法

「遊戲教學法」是將遊戲元素融入教學活動當，相比起傳統的「講述教學法」，遊戲會更容易引起學生學習的動機。在設計遊戲化教學時，我們應該先確認「教學目標」、「教學時間」、「學生人數」、「遊戲規則」等等，先評估採用遊戲的方式，與背後能產生的學習成效是否為正比。若遊戲時間過長，學習成效可能沒有增加。反而，讓學生以為只是單純在玩遊戲，這樣就失去了原本所設定的教學目標。相反，若遊戲時間過短，並沒有把活動精隨傳達給學生，同樣會失去了原本的教學目標。

（三）合作學習教學法

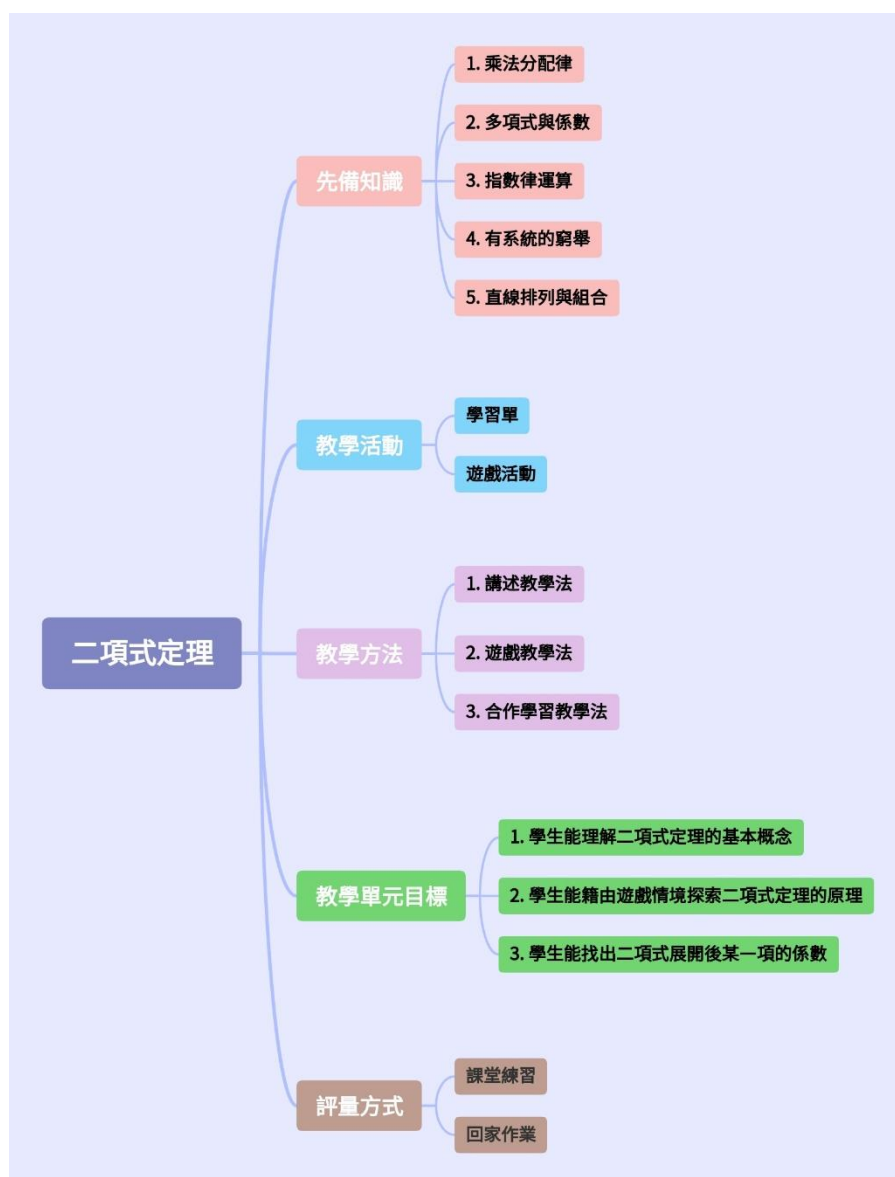
「合作學習教學法」將學生分配到異質小組。

優點：同學彼此協助，相互支持，發展他們人際技巧，在合作過程中，可以了解到別人的想法，從中學習。

缺點：如果班上的人數相對較多，可能不易達到討論的預期效果。這種教學法如果是放在小班化的教學，成效會更好。如何控制時間，選擇合適的討論問題，是老師要去思考的問題。若學生討論組織得當，能激發學生學習的積極性。

教學方式有很多種，以上是本教案中最主要採用的三種教學方法。每一個教學方式都它的利與弊，老師只能依據教學內容、學生程度，選擇合適的應教學方式。不同的教學方式結合在一起，都會使學生的學習成效影響有所不同。另外，在設計教學內容時，可以思考一下學生會出現什麼迷思概念、會有什麼突發情況。畢竟，教學過程與設計教案的情景會有所差異。

四、課程概念架構圖



參、教學活動設計

單元名稱	組合	適用年級	高一			
課程名稱	撲克牌中的二項式定理	教學時間	50 分鐘			
教材版本	南一版					
學生人數	30 人					
教學準備	電腦、學習單、教具（卡牌）、PPT(講解遊戲規則)					
能力指標/學習表現		分年細目/學習內容		單元教學目標		
d-V-7： 認識排列與組合的計算模型，理解其運算原理，並能用於溝通和解決問題。		D-10-3： 有系統的窮舉。直線排列與組合，包含二項式展開作為組合的應用範例。		1. 學生能理解二項式定理的基本概念 2. 學生能藉由遊戲情境探索二項式定理的原理 3. 學生能找出二項式展開後某一項的係數		
單元教學目標		教學內容		時間	評量方式	備註
1. 學生能藉由遊戲情境探索二項式定理的原理		壹、課前預備 老師在課前先預設好學生的分組名單，並提醒學生在上課前，提前移動好桌子。 貳、以遊戲方式進行教學活動。 老師向學生講解遊戲規則： (1) 遊戲會進行兩輪，每人會先派發 5 張 x 牌和 5 張 y 牌，每人輪流出一張牌(每人一定要出牌，不能不出牌)直到手中沒有牌，遊戲就結束。		7	口頭評量 學習單 卡牌 PPT	應根據學生的程度來進行分組，盡量避免數學程度都是較差的同學被分到同一組。 1. 注意學生的反應 2. 注意班上的人數是否能平均分組。

2. 學生能理解二項式定理的基本概念	(2) 第一輪：每組有兩個玩家； 第二輪：每組有三個玩家。 當第一輪遊戲結束後，把同學分組 3 個人一組，卡牌的數量保持不變，再提醒學生每一輪都要出牌，並不可以不出牌，並把每個回合的結果寫在學習單上。 當兩輪遊戲結束後，就進入課程內容。 此時，教室上的座位保持不動，方便與旁邊的同學討論課程內容。 例 1. 展開 $(x + y)^2$ 老師提問：「同學們知道 $(x + y)^2$ 展開後的式子是什麼？」 學生回答：「$x^2 + 2xy + y^2$」 若 學生回答：「$x^2 + y^2$」，不要馬上說學生講錯，可以先了解學生為什麼會有這樣的迷思概念。接著，把 $(x + y)^2$ 展開的過程寫出來。 $\begin{aligned}(x + y)^2 &= (x + y)(x + y) \\ &= x^2 + 2xy + y^2\end{aligned}$ 引導學生思考二項式定理跟遊戲的關係 老師提問：「在剛剛的遊戲裡，第一輪中所出現的結果有那些？」 學生回答：「xx、xy、yx、yy」 讓學生觀察與黑板上的 $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ 的式子有什麼關係。 當學生知道兩者有什麼關係後，可以向學生解釋 $(x + y)^2$ 中次方的 2 是指兩個人進行遊戲，而 x^2、$2xy$、y^2 指的是兩人出一張牌的所有情況。	40 口頭評量 學習單	3. 提醒學生把每輪的結果，寫在學習單上。 提示學生使用乘法分配律和指數律運算 提示學生跟前面所學到的組合有關
---------------------------	--	-------------------------------	--

例 2. 展開 $(x + y)^3$

老師提問：「同學們知道 $(x + y)^3$ 展開後的式子是什麼？」

若 **學生** 不能回答，可以提示學生 $(x + y)^3$ 可以參考例題 1，寫成

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= (x + y)(x + y)(x + y) \\ &= (x + y)^2(x + y) \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

延伸到 $(x + y)^3$ 中次方的 3 是指三個人進行遊戲，而 x^3 、 $3x^2y$ 、 $3xy^2$ 、 y^3 指的是三個人出牌的所有情況，並向學生說明係數組合的關係。

讓學生在學習單上，寫一題類題。
寫出 $(x + y)^5$ 的展開式。

接著，提問學生遊戲可不可以 n 個人玩？

若學生回答：「不可以」可以先了解學生為什麼有這樣的想法。在這裡先預設一下，學生會這樣的想法是，前面兩個例子都很清楚遊戲的人數，但 n 不是一個實際數字，因此學生才認為遊戲不可以 n 個人玩。但是，可以先問學生，2 個人玩可以，3 個人玩可以，那 4 個人玩可以嗎？如果學生能接受，就可以說其實很多玩可以，但我們不知道有幾個人，所以就假設有 n 個人，而且 n 要是正整數。

當學生回答：「可以」，就引入二項式定理

接著，提問若遊戲 n 個人玩，而每一個人手裡的牌是分別是 x 跟 y ，

定理：展開 $(x + y)^n$

老師提問：「若遊戲 n 個人玩，那 $(x + y)^n$ 展開後的式子是什麼？」

若 **學生** 不能回答，可以提示學生觀察例題 1 和

連結數學
歸納法的
思路引導
一般化的
二項式定
理

3. 學生能找出二項式展開後某一項的係數

例題 2。

讓學生思考幾分鐘，並要求學生嘗試在學習單上寫出展開式後的結果。

學生寫出展開式後，再向學生講述這就是二項定理的一般式。

二項式定理

若 n 為正整數，則

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n. \text{ (依 } b \text{ 次數升冪排列)}$$

進入此部份前，先幫學生複習係數的概念。老師可以寫幾個代數式子 $2x^2y$ 、 $-8y$ 、 x^5 ，提問學生當中的係數。

學生可能會出現的迷思概念：

可能會把「係數」跟「項」混淆，老師可以向學生解釋下，兩者之間的差別。

老師提問：「若現在要找 xy^2 的係數，

- (1) x 跟 y 各要出幾張？
- (2) 出牌的情況有那些？
- (3) 出牌的情況共有多少種？」

若學生不能回答，可以提示他們觀察次方的數字。

若**學生回答**：「 x 要出 1 張牌，而 y 要出 2 張牌，出牌的情況有 xyy 、 yxy 、 yyx ，共有 3 種。」則可以進入下一個例子。

接下來，老師會向同學提問另一個例子。

老師提問：「若現在要找 y^3 的係數，

- (1) x 跟 y 各要出幾張？
- (2) 出牌的情況有那些？
- (3) 出牌的情況共有多少種？」

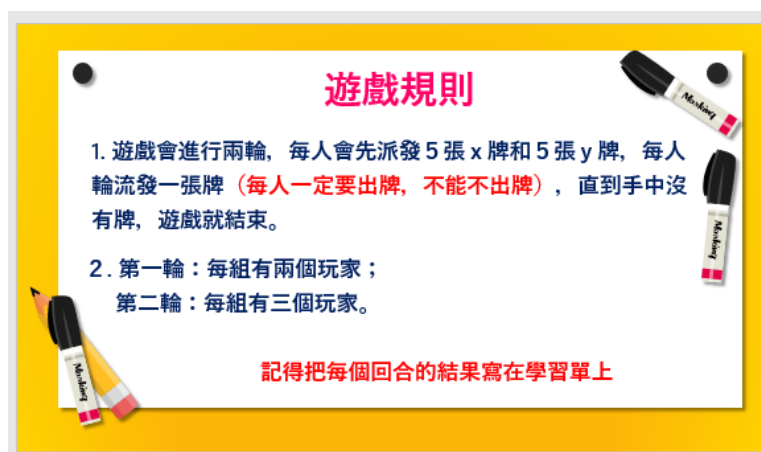
	若學生不能回答，可以提示他們觀察次方的數字，以及思考是否每一類 (x, y) 的卡牌都要出。 若學生回答：「x 要出 0 張牌，而 y 要出 3 張牌，出牌的情況只有 yyy，共有 1 種。」 上面教學過程是希望利用遊戲，讓學生了解到二項式定理的背後意義。接下來，就會進入到例題 3 求二項式定理展開後的係數。 例題 3 試求 $(2x - y^2)^6$ 展開式中 x^3y^6 項的係數。 讓學生在學習單上，寫一題類題。 寫出 $(2x - y^2)^6$ 的 x^4y^4 項的係數。 例題 4 設 n 為正整數，證明：$C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n = 2^n$。 肆. 課堂的總結與安排 (1). 複習這堂課的教學重點 1. 如何把二項式定理如何展開 2. 熟悉二項式定理展開後每一項所代表的意義 3. 如何找出二項式展開後的係數 (2) 安排回家作業 簡單講述一下作業的題目，也可以給予相關的提示。 (3) 預告下一節課堂的內容 提前告訴學生下次上課的內容，讓學生可以提前預習。	3	口頭評量 學習單	
--	---	---	-------------	--

肆、教學評量

單元教學目標	評量方式	備註
1. 學生能藉由遊戲情境探索二項式定理的原理	口頭評量、形成性評量	
2. 學生能認識二項式定理的基本概念	口頭評量、形成性評量	
3. 學生能找出二項式展開後某一項的係數	口頭評量、形成性評量	

伍、附錄

附件一（PPT-遊戲規則）：



附件二（學習單）：

班級：_____ 姓名：_____ 學號：_____

請把第一輪遊戲每一個回合的結果紀錄在下表：

組員姓名	第一回合	第二回合	第三回合	第四回合	第五回合

請把第二輪遊戲每一個回合的結果紀錄在下表：

組員姓名	第一回合	第二回合	第三回合	第四回合	第五回合

例題類題

1. 寫出 $(x + y)^5$ 的展開式

2. 寫出 $(2x - y^2)^6$ 的 x^4y^4 項的係數。

二項式定理

寫出 $(x + y)^n$ 的展開式

回家作業

1. 寫出 $(1 - x)^5$ 的展開式
2. 寫出 $(2 + x^2)^4$ 的展開式
3. 試求 $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^8$ 的展開式中 x^4 項的係數。
4. 試求 $(2x - y^2)^6$ 的展開式中 x^3y^6 項的係數。